

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques. Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.
Mouvement de vecteur accélération constant.	Exprimer la vitesse et la position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle.
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers	
Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

Plan

1 Référentiels d'espace-temps

- 1.1 Repère de temps
- 1.2 Repères d'espace

2 Cinématique du point matériel

- 2.1 Mouvement, trajectoire, loi horaire
- 2.2 Vecteurs vitesse et accélération
- 2.3 Déplacement élémentaire
- 2.4 Expressions dans les différents systèmes de coordonnées

3 Études de quelques mouvements

- 3.1 Mouvements rectilignes
- 3.2 Mouvement à vecteur accélération constant
- 3.3 Mouvements circulaires

4 Cinématique du solide

- 4.1 Repérage d'un solide
- 4.2 Mouvement de translation
- 4.3 Solide en rotation autour d'un axe fixe
- 4.4 Mouvement quelconque (HP)

	Connaissances
☐	Propriété de l'espace et du temps en mécanique classique.
☐	Centre, axes et utilisation des référentiels héliocentrique, géocentrique et terrestre.
☐	Définition des coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
☐	Vecteur-position, vecteur-vitesse, vecteur-accélération : définition, expression en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.
☐	Déplacement élémentaire : expression et schéma du trièdre associé, en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
☐	Surfaces et volume élémentaires : expressions et schéma associé, en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
☐	Repère de Frenet : définition des 3 vecteurs et expression des vecteurs position, vitesse et accélération.
☐	Définition d'un solide.
☐	Définition de translation rectiligne et circulaire.
☐	Rotation autour d'un axe fixe : trajectoire d'un point quelconque, vitesse du point en fonction de sa distance à l'axe, vecteur rotation.

	Capacités
☐	Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.
☐	Décrire mathématiquement un mouvement de vecteur accélération constant : exprimer vitesse et position en fonction du temps, obtenir la trajectoire.
☐	Décrire mathématiquement un mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes des vecteurs position/vitesse/accélération.
☐	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe (fixe) et de la vitesse angulaire.
☐	Utiliser les expressions des déplacements, surfaces et volumes élémentaires pour calculer par intégrale une longueur, une surface ou un volume macroscopique.

Introduction

Qu'est-ce que la mécanique ? Richard Taillet, dans son *Dictionnaire de la physique*, donne la définition suivante : « domaine de la physique qui s'intéresse au mouvement ou à l'équilibre des systèmes matériels. On distingue la mécanique classique qui attribue aux objets fondamentaux un état déterministe bien défini, de la mécanique quantique qui les modélise d'une manière intrinsèquement probabiliste. Par ailleurs, on sépare aussi l'étude des systèmes discrets et composés d'un nombre fini de constituants, de celle des systèmes continus. »

Au sein de la mécanique, comment peut-on définir la cinématique ? Toujours selon R. Taillet, la cinématique « qualifie ce qui se rapporte à la description du mouvement, sans s'intéresser à ses causes. [...] Toutes les unités physique qui y interviennent s'expriment donc uniquement à l'aide de longueurs et de durées. En particulier, la position, la vitesse et l'accélération sont des notions cinématiques, mais pas la notion de force. Cette dernière entre dans le cadre de la dynamique ».

Historiquement la description des mouvements est purement cinématique jusqu'aux études menées par Isaac Newton (1642 - 1727). On peut citer par exemple

- Ptolémée (~ 99 - ~ 168) : mathématicien géographe et astronome dont on ne connaît pas la nationalité avec certitude. Un de ses ouvrages importants s'intitule l'« Almageste » où il décrit le modèle géocentrique, le mouvement des astres et la composition des mouvements circulaires uniformes (MCU).
- Copernic (1473 - 1543) : Érudit polonais connu pour son modèle héliocentrique de l'Univers.
- Képler (1571 - 1630) : Astronome et physicien allemand, disciple de Tycho Brahe. En utilisant les observations de ce dernier, il établit les tables rudolphines publiées en 1627 permettant de prédire avec une bien meilleure précision les événements célestes tels que les passages de Mercure et de Vénus devant le Soleil et les éclipses solaires et lunaires. Par la suite, c'est en observant le mouvement de la planète Mars qu'il raffine le modèle héliocentrique du Système solaire en remplaçant les trajectoires circulaires des planètes par des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.
- Galilée (1564 - 1642) : Savant italien célèbre pour ses avancées en mécanique et son utilisation de la lunette en astronomie. Il s'intéressa à la chute des corps et au mouvement des pendules. En 1638, il proposa l'hypothèse que le mouvement de chute libre est uniformément accéléré et conduit à des trajectoires paraboliques. On lui doit aussi la première ébauche du principe d'inertie que formalisera Newton. L'interprétation des observations du mouvement des lunes de Jupiter suggérait fortement une vision héliocentrique du Système solaire comme l'avait précédemment exposé Copernic, vision qu'il défendit contre le système de Ptolémée centré sur la Terre. Il fut pour cela censuré par l'Église en 1616 et condamné en 1633 à la prison mais sa peine est commuée par le pape Urbain VIII en résidence surveillée dans sa demeure florentine.

Il faudra attendre les années 1740 pour que l'Eglise revienne sur l'interdiction de publication des écrits de Galilée. Ce n'est cependant que le 31 octobre 1992 que Jean-Paul II reconnaît clairement les erreurs de certains théologiens du XVII^e siècle.

Ce n'est qu'avec Isaac Newton que le mouvement des astres est relié aux actions mécaniques : c'est la naissance de la dynamique et de la loi de gravitation universelle. Jusqu'au début du XX^e siècle, l'espace et le temps sont deux entités distinctes, sans lien : le temps est absolu et uniforme ; l'espace est absolu, homogène, isotrope, immuable, illimité et euclidien.

La recherche de cohérence entre l'électromagnétisme et la mécanique va être à la base de la mécanique relativiste et des travaux d'Einstein en particulier. C'est la première remise en cause des postulats de Newton (1905). Quant à la physique quantique, elle « naît » par la publication de trois études : l'analyse du rayonnement du corps noir par Max Planck en 1900 (il recevra le prix Nobel en 1918), l'explication de l'effet photo-électrique par Albert Einstein en 1905 (prix Nobel en 1921) et l'interprétation des raies spectrales de l'hydrogène par Niels Bohr en 1913 (prix Nobel en 1922).

La mécanique newtonienne ou classique, au cœur de ce cours, reste valable pour des petites vitesses ($v \ll c$) et pour des objets dont la taille caractéristique est grande devant la longueur d'onde de De Broglie associée : $\lambda_{DB} = h/p$ (h , la constante de Planck et p , la quantité de mouvement du système).

On parle de mécanique du point... mais qu'est-ce qu'un point matériel ? Aucun objet n'est rigoureusement ponctuel au sens mathématique du terme. Pour étudier la mécanique du point, il faut préciser les conditions pour lesquelles un objet matériel peut être modélisé par un point.

 Un solide est un système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres. Il faut paramètres pour repérer un solide dans l'espace : coordonnées pour un point du solide et angles pour son orientation.

 Un point matériel est un solide dont on peut négliger l'extension spatiale et la rotation sur lui-même. Pour repérer un point dans l'espace, il suffit de trois coordonnées.

Exemple : Dans son mouvement orbital autour du Soleil, la Terre peut être modélisée par un point matériel. En effet, $R_T = 6400$ km et $d_{ST} = 150 \times 10^6$ km. On a donc $\frac{R_T}{d_{ST}} \sim 4 \times 10^{-5} \ll 1$.
⇒ On retiendra donc qu'un système peut être assimilé à un point lorsque son extension spatiale est négligeable devant la taille caractéristique de son mouvement.

Remarque : En mécanique, le seul vrai point matériel est le centre de masse d'un système. Le mouvement d'un système quelconque ne se réduit pas à celui de son centre de masse.

1 Référentiels d'espace-temps

Un point matériel M est toujours en mouvement relatif par rapport à un système de référence.

 Le référentiel d'une étude mécanique est le cadre spatio-temporel de l'étude. Pour le définir, on a besoin d'un repère de temps et d'un repère d'espace.

Remarque : Comme la description du mouvement d'un système dépend du référentiel, on parle de relativité du mouvement. On n'oubliera donc jamais de préciser le référentiel.

1.1 Repère de temps

Le repère de temps est constitué d'une horloge permettant le repérage des instants. Pour dater un événement, il faut donc définir une origine des temps et une mesure du temps par l'unité de durée : la seconde (voir compte-rendu de la Conférence Générale des Poids et Mesures pour une définition détaillée de la seconde).

1.2 Repères d'espace

On peut se représenter le repère d'espace comme une sorte de solide idéal indéformable qui remplirait l'espace. Il est constitué de :

- une origine d'espace (un point fixe de ce solide)
- une mesure d'espace définie par l'unité de longueur : le mètre (voir le CR de la CGPM)
- trois directions orthogonales fixe repérées par trois axes.

En fonction de la forme de la trajectoire d'un système, différents paramétrages géométriques peuvent être utilisés, ce qui correspond à différents systèmes de coordonnées.

1.2.1 Coordonnées cartésiennes

En physique classique, on modélise l'espace par un espace euclidien à 3 dimensions. Un repère d'espace est donc défini par une origine O et une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ qui sera toujours choisie



Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) qui sont aussi les composantes du vecteur position :

Remarques :

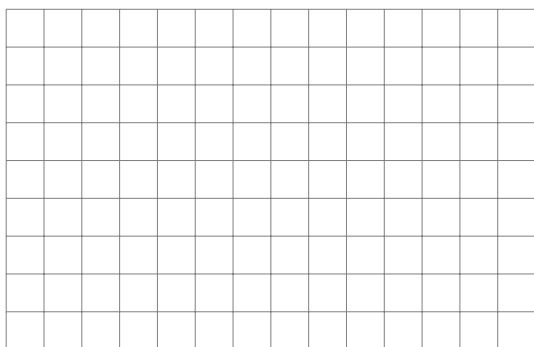
- x, y et z ont la dimension d'une longueur.
- les vecteurs unitaires de la base sont sans dimension.
- x, y et z sont les projections orthogonales du vecteur position $\vec{OM}$ sur $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ (en effet : $\vec{OM} \cdot \vec{e}_x = x$).

Dans certains cas, d'autres systèmes de coordonnées sont plus adaptés que les coordonnées cartésiennes. Il s'agit des coordonnées « curvilignes », utiles lorsqu'il y a des symétries.

1.2.2 Coordonnées polaires planes

On quadrille le plan par une grille centrée en O . On repère ainsi un point M par la distance $r = \|\vec{OM}\|$ à l'origine O et par l'angle orienté $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OM})$.

Remarque : En physique, $r \in [0; +\infty[$ et $\theta \in [0; 2\pi]$



On définit alors une base locale liée au point M par les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$. Il s'agit donc d'une base de projection mobile orthonormée telle que :

En coordonnées polaires, le vecteur position s'écrit donc :

Puisque $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est une base du plan, tout vecteur peut s'écrire dans cette base :

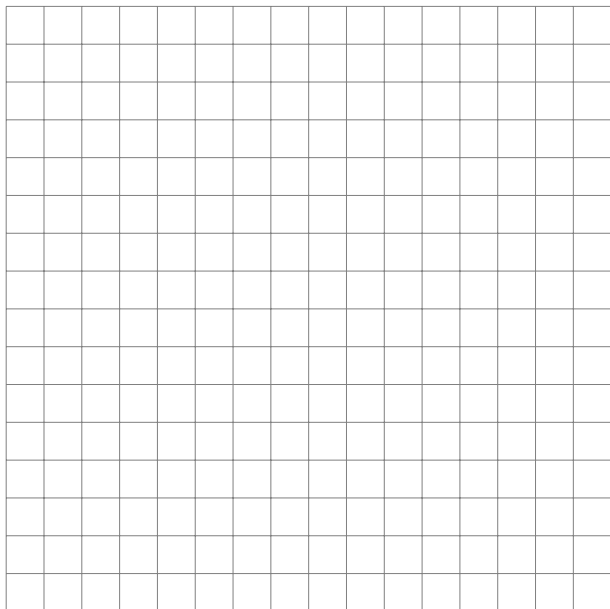
w_r est appelée composante et w_θ est appelée composante

Remarque : Attention à ne pas confondre coordonnées du point M et composantes du vecteur position. Il n'y a que pour les coordonnées cartésiennes que ces deux notions coïncident.

Comment passe-t-on des coordonnées cartésiennes du plan aux coordonnées polaires ?

1.2.3 Coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires

On étend les coordonnées polaires en ajoutant un axe (Oz) orthogonal au plan (xOy) . On obtient ainsi le système de coordonnées cylindriques : $\vec{e}_z$ est choisi de sorte que la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ soit orthonormée directe.



Repérage : du point M , on définit le point H , projeté orthogonal de M sur le plan xOy et K , le centre du cercle passant par M et d'axe (Oz) . On définit alors :

- $r = \|\vec{OH}\| = \|\vec{KM}\|$ la distance de M à l'axe (Oz) .
 $r \in [0; +\infty[$
- $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OH})$, angle polaire tel que $\theta \in [0; 2\pi]$
- $z = \vec{HM} = \vec{e}_z \cdot \vec{OM}$, altitude du point M tel que $z \in \mathbb{R}$.

On définit une nouvelle base locale de projection liée au point M $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Dans cette base, le vecteur position s'écrit :

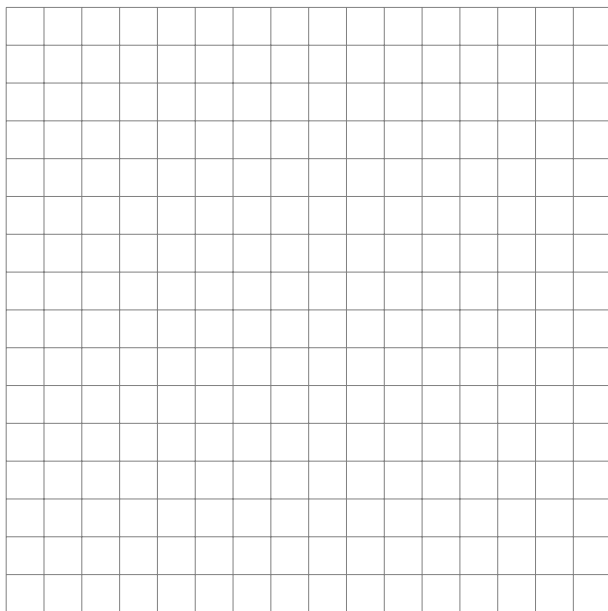
La composante suivant l'axe (Oz) est appelée composante

Remarque : Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ varient lorsque M bouge. En détail : une variation de r ne modifie pas la base mobile alors qu'une variation de θ fait tourner la base. Exprimer les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base cartésienne puis dériver par rapport à θ . Qu'obtient-on ?

1.2.4 Coordonnées sphériques

On souhaite repérer un point M par sa position sur une sphère de rayon OM et par deux angles. On emprunte le vocabulaire des géographes :

- l'équateur : cercle marquant l'intersection de la sphère avec le plan xOy .
- un parallèle est un cercle de la sphère parallèle à l'équateur. Il est repéré par sa latitude (0° à l'équateur, 90° aux pôles)
- un méridien est un cercle qui contient l'axe Nord-Sud. Il est repéré par sa longitude.



Repérage : en général, on choisit le plan (xOy) comme plan équatorial et l'axe (Ox) sert de référence pour la longitude φ . On déduit la latitude pour la colatitude θ . Soit H , le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) . Un point M est donc repéré par :

- $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ distance de M à O et telle que $r \in [0; +\infty[$
- $\theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$, colatitude telle que $\theta \in [0; \pi]$
- $\varphi = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OH})$, longitude telle que $\varphi \in [0; 2\pi]$.

On définit alors une base locale liée au point M , base de projection mobile par le trièdre orthonormé direct $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Dans cette base, le vecteur position s'écrit :

Remarque : Attention en sphérique à l'orientation de θ et de $\vec{e}_\theta$. Ne pas confondre non plus $\vec{e}_\theta^{cyl}$ et $\vec{e}_\theta^{sph}$.

Comment passe-t-on des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes ?

2 Cinématique du point matériel

2.1 Mouvement, trajectoire, loi horaire

On étudie le mouvement d'un point M par rapport au référentiel $\mathcal{R} = (0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Sa position est repérée par rapport à $\mathcal{R}$ par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$.



Étudier le mouvement de M dans $\mathcal{R}$ revient à étudier la fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$.



L'ensemble des positions successives prises par le point M au cours du temps constitue la trajectoire.

On peut repérer le point M le long de sa trajectoire par son abscisse curviligne s . On doit donc se définir une origine M_0 sur la trajectoire et l'orienter. L'abscisse curviligne est alors $s = \overbrace{M_0 M}^{\text{arc orienté}}$ arc orienté de M_0 à M . $|s|$ est donc la longueur de l'arc de courbe.



La loi horaire du mouvement est la fonction scalaire $t \mapsto s(t)$. Elle permet d'étudier le mouvement d'un point sur sa trajectoire.

2.2 Vecteurs vitesse et accélération

 La vitesse instantanée du point M dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ est définie comme la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ par rapport au temps t et relativement au référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{v} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

Remarque : Introduisons l'abscisse curviligne $s(t)$ dans l'expression précédente :

-  **Propriétés :**
- La vitesse instantanée est portée par la tangente à la trajectoire et orientée dans le sens du mouvement.
 - La norme du vecteur vitesse se mesure en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: $[v] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$.

 L'accélération du point M dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ est la dérivée temporelle de la vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ et relativement à $\mathcal{R}$. C'est donc aussi la dérivée seconde du vecteur position :

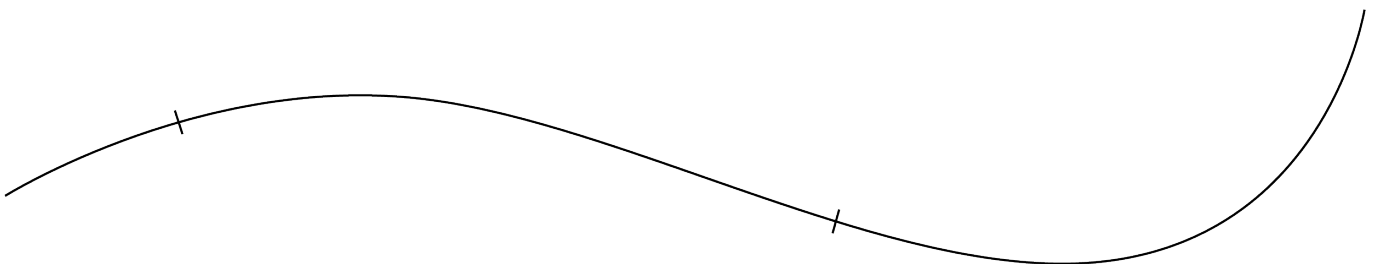
$$\vec{a} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}}$$

La norme du vecteur accélération se mesure en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$: $[a] = \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$.

Remarques importantes

2.3 Déplacement élémentaire

Considérons un point M mobile par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O . Il est situé en $M(t)$ à l'instant t . A l'instant $t + \Delta t$, il est en $M(t + \Delta t)$. Le point M est repéré par la position $\overrightarrow{OM}(t)$ à t et $\overrightarrow{OM}(t + \Delta t)$ à $t + \Delta t$.



On appelle le vecteur $\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}$. Si on introduit le point O par la relation de Chasles, on obtient :

En faisant tendre Δt vers 0, le Δ devient un d , on note alors dt la durée élémentaire ou infinitésimale. Pendant dt , M passe donc de $M(t)$ à $M(t+dt)$, on peut alors écrire :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}$$

C'est le D'autre part puis $\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, on a alors : $d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt$. C'est une autre façon de montrer que la vitesse est colinéaire au déplacement élémentaire, c'est-à-dire que $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.

2.4 Expressions dans les différents systèmes de coordonnées

2.4.1 Coordonnées cartésiennes

★ Vecteur position : _____

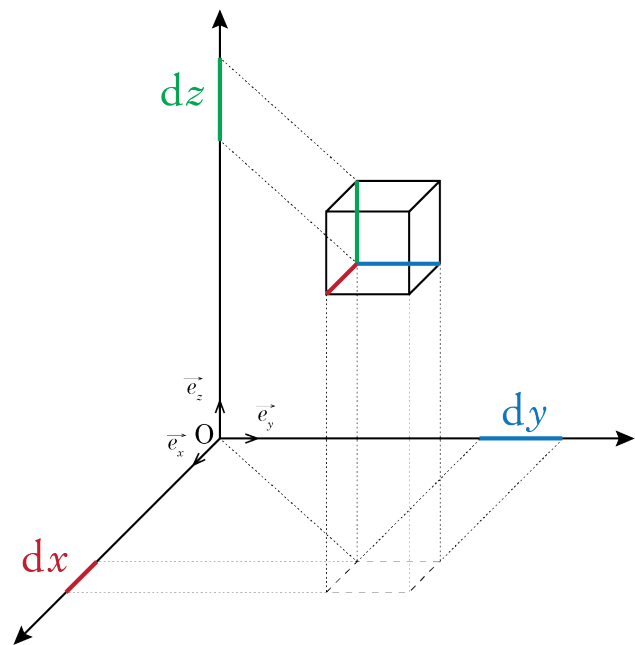
★ Déplacement élémentaire :



★ Vecteur vitesse : c'est le rapport du déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ par l'intervalle de temps élémentaire dt de ce déplacement :

★ Vecteur accélération : _____

★ Surfaces et volume élémentaires :

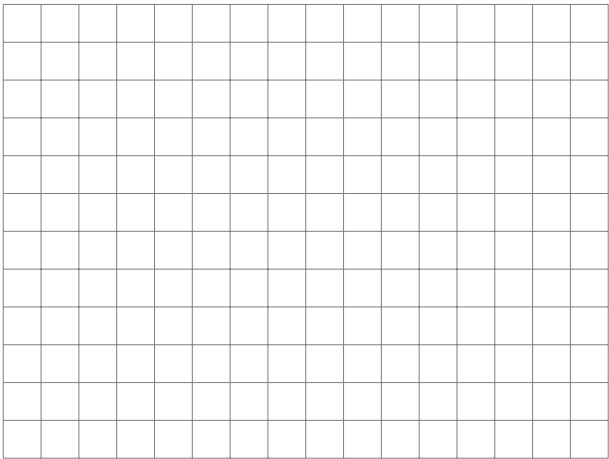
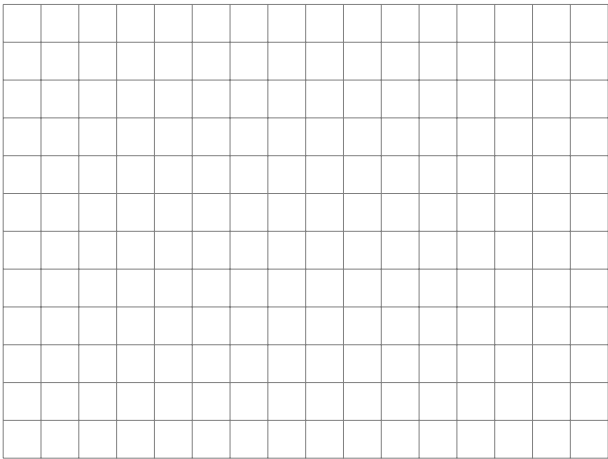


★ Bilan : en cartésiennes, le référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ joue à la fois le rôle de référentiel du mouvement et base de projection. Dans les autres systèmes de coordonnées, on utilise une base locale mobile pour faire les projections. Il faudra donc faire attention : les vecteurs unitaires sont alors variables au cours du temps.

2.4.2 Coordonnées cylindro-polaires

★ Vecteur position :

★ Déplacement élémentaire :

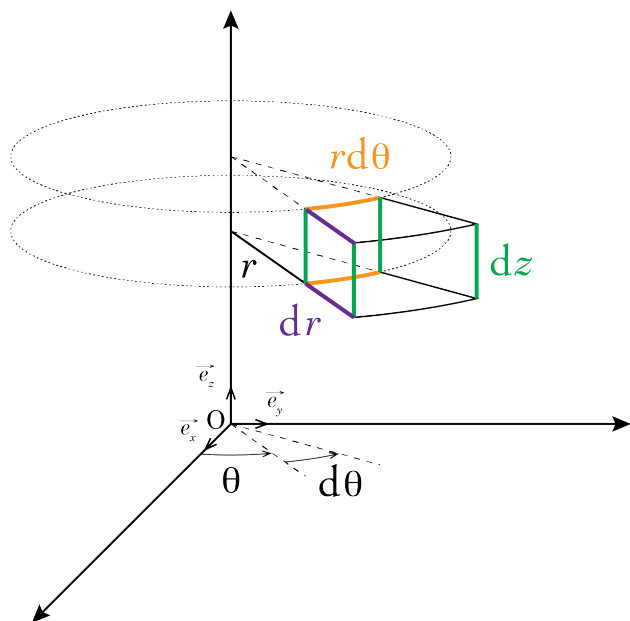


★ Vecteur vitesse : _____

★ Dérivation des vecteurs de la base mobile : _____

★ Vecteur accélération : _____

★ Surfaces et volume élémentaires : _____



2.4.3 Coordonnées sphériques

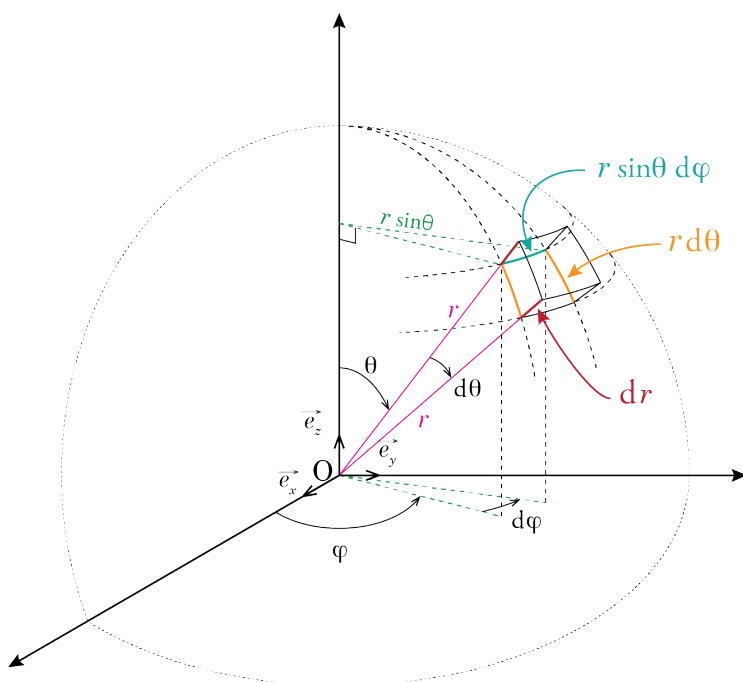
★ Vecteur position : _____

★ Déplacement élémentaire : _____

★ Vecteur vitesse : _____

★ L'expression de l'accélération dans le cas général est très compliquée, elle sera donnée.

★ Surfaces et volume élémentaires :



3 Études de quelques mouvements

3.1 Mouvements rectilignes



Un mouvement est rectiligne si sa trajectoire est une droite D .

Soit un point O de D et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de D , on a ainsi $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}$. On en déduit donc : $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}$ et $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}$. Distinguons deux cas :

- Si la norme de la vitesse est constante, alors $\dot{x} = v_0 \forall t$ et $\ddot{x} = 0$, le mouvement est
..... L'équation horaire du mouvement s'écrit :

$$x(t) = \dots\dots\dots$$

où x_0 est une constante d'intégration : il s'agit de la coordonnée de M à $t = 0$ ($x(t = 0) = x_0$).

- Si la norme de l'accélération garde une valeur constante a_0 , alors le mouvement est
..... et

$$v(t) = \dots\dots\dots$$

où v_0 est la composante de la vitesse de M selon $\vec{u}$ à $t = 0$ et

$$x(t) = \dots\dots\dots$$

où x_0 est l'abscisse de M à $t = 0$.

Remarque : L'intégration d'une accélération constante pour obtenir l'équation horaire fait intervenir deux constantes d'intégration x_0 et v_0 : ce sont les conditions initiales du mouvement : position et vitesse du point M à $t = 0$.

3.2 Mouvement à vecteur accélération constant

Il s'agit par exemple du mouvement d'un corps lancée dans le vide soumis à l'accélération de la pesanteur.

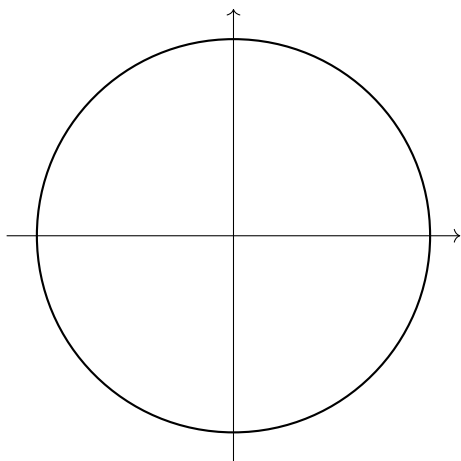
Soit $\vec{a}$ l'accélération (constante) du mouvement, on a alors :

Lined area for notes or calculations.

3.3 Mouvements circulaires

3.3.1 Description générale

Un mouvement est circulaire si sa trajectoire est un cercle. Soit O le centre de ce cercle et R son rayon. Le point M est donc entièrement paramétré par l'angle polaire $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OM})$.



L'abscisse curviligne est égale à la longueur de l'arc de cercle :

$$s(t) = \dots\dots\dots$$



La vitesse de variation de l'angle $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ est appelée
..... instantanée.

L'étude du mouvement se fait naturellement en coordonnées polaires $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Des paragraphes précédents, on déduit que

$$\vec{OM}(t) = \dots\dots\dots$$

$$\vec{v}(t) = \dots\dots\dots$$

Remarque :

3.3.2 Mouvement circulaire uniforme

Remarque : Projetons le vecteur position sur la base cartésienne :

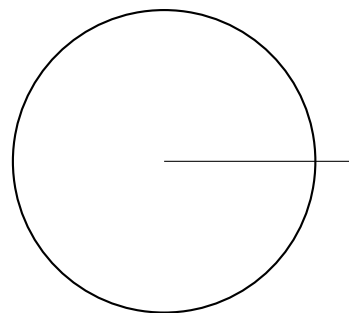
Exprimons l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires... que retrouve-t-on ?

$$\vec{OM} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{v} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\vec{a} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Remarques :



3.3.3 Mouvement circulaire quelconque

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across its entire width, providing a guide for handwriting or typing. The paper itself is a clean, off-white color.

4 Cinématique du solide

4.1 Repérage d'un solide

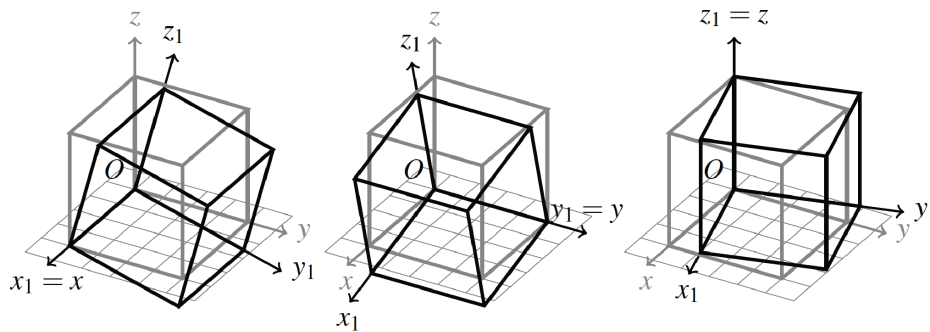


Un **solide** est un système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres.

Remarque : Ne pas confondre avec un solide déformable dont les points peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres.
Exemple : un ressort étiré.

Considérons un référentiel d'étude $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ orthonormé direct. On fixe à chaque solide un repère $\mathcal{R}_1 = (O_1, x_1, y_1, z_1)$ lui aussi orthonormé direct. Dans ce repère $\mathcal{R}_1$, chaque point du solide a des coordonnées constantes. Repérer le solide dans l'espace revient donc à repérer le repère $\mathcal{R}_1$ par rapport au repère $\mathcal{R}$, notre référentiel d'étude. Dans le cas le plus général, 6 paramètres ont donc nécessaires :

- les trois coordonnées d'un point du solide, typiquement celle de l'origine O_1 du repère $\mathcal{R}_1$.
- trois angles qui définissent l'orientation des axes (x_1, y_1, z_1) de $\mathcal{R}_1$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.



4.2 Mouvement de translation

4.2.1 Définition et conséquences



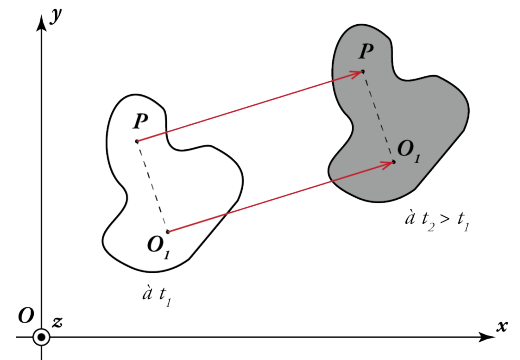
Un solide est en **translation** lorsque les directions du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude.

Les directions du repère lié au solide étant fixes dans le référentiel d'étude, on peut donc utiliser les mêmes que celles du référentiel d'étude : les vecteurs unitaires de ces axes sont donc $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Un point P quelconque du solide est repéré par rapport au solide par ses coordonnées (x_P, y_P, z_P) telles que

$$\overrightarrow{O_1P} = x_P \vec{u}_x + y_P \vec{u}_y + z_P \vec{u}_z$$

Puisque les deux bases liées à $\mathcal{R}_1$ et à $\mathcal{R}$ sont identiques, le vecteur $\overrightarrow{O_1P}$ est constant dans $\mathcal{R}$. Le mouvement suivi par un point quelconque d'un solide en translation est alors identique à celui de O_1 .

Conséquences : Les vecteurs déplacement infinitésimal, vitesse et accélération de chacun des points du solide sont identiques à tout instant. On peut donc parler sans ambiguïté du déplacement, de la vitesse et de l'accélération d'un solide. De plus, le mouvement du solide est parfaitement défini par la donnée du mouvement d'un de ses points : on choisira l'origine du repère O_1 ou le centre de gravité G du solide.



Tous les points d'un solide en translation ont le même mouvement. Le mouvement est donc complètement décrit par le mouvement d'un de ses points.

Pour décrire le mouvement d'un solide en translation, il suffit de **trois coordonnées**. On se ramène donc au cas de la cinématique du point.

4.2.2 Translation rectiligne

Lorsque le mouvement d'un point d'un solide est en mouvement rectiligne, tous les points du solide sont alors aussi en mouvement rectiligne. On dit que le solide est en **translation rectiligne**. Chaque point du solide décrit une portion de droite de même direction.

4.2.3 Translation circulaire

Lorsque le mouvement d'un point d'un solide est en mouvement circulaire, tous les points du solide sont alors aussi en mouvement circulaire. On dit que le solide est en **translation circulaire** puisque les axes du repère lié au solide restent identiques à ceux du référentiel d'étude. Chaque point du solide décrit alors une portion d'arc de cercle de même rayon mais de centre distinct. L'exemple classique est le mouvement d'une nacelle d'une grande roue.

4.3 Solide en rotation autour d'un axe fixe



Un solide est en rotation autour d'un axe Δ fixe dans $\mathcal{R}$ s'il existe une unique droite Δ immobile à la fois par rapport au solide et au référentiel $\mathcal{R}$

On choisit la situation suivante :

- on confond les origines O de $\mathcal{R}$ et O_1 de $\mathcal{R}_1$ et on les place sur l'axe Δ .
- l'axe fixe Δ , l'axe Oz de $\mathcal{R}$ et l'axe Oz_1 de $\mathcal{R}_1$ coïncident. L'axe Δ est orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$.

La position du solide est donc complètement repérée par l'angle θ entre l'axe (Ox_1) et l'axe (Ox) .

Un point P lié au solide est repéré par le vecteur $\vec{OP}$ que l'on décompose en une composante parallèle à Δ et une composante qui lui est perpendiculaire. On introduit alors le point H , projeté orthogonal de P sur l'axe Δ . On peut alors écrire :

$$\vec{OP} = \vec{OH} + \vec{HP}$$

Le vecteur $\vec{OH}$ est constant puisqu'il appartient à Δ . La distance $\|\vec{HP}\|$ reste constante puisque H et P appartiennent au solide et $\vec{HP}$ fait donc un angle constant avec l'axe $\vec{u}_{x_1}$. Le vecteur $\vec{HP}$ est donc entraîné en rotation avec le solide et P décrit donc un cercle de centre H , de rayon HP à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Dans $\mathcal{R}$, le mouvement de P est un mouvement circulaire de centre H dans le plan (Hxy) passant par H , orthogonal à $\vec{u}_z$ et orienté par $\vec{u}_z$. On peut donc définir sa position par ses coordonnées polaires de centre H . On pose alors $\|\vec{HP}\| = r$, $\vec{u}_r = \frac{\vec{HP}}{r}$ et $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$ le vecteur directement orthogonal à $\vec{u}_r$ dans le plan (Hxy) . On a donc :

$$\vec{HP} = r\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v}_{P/\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

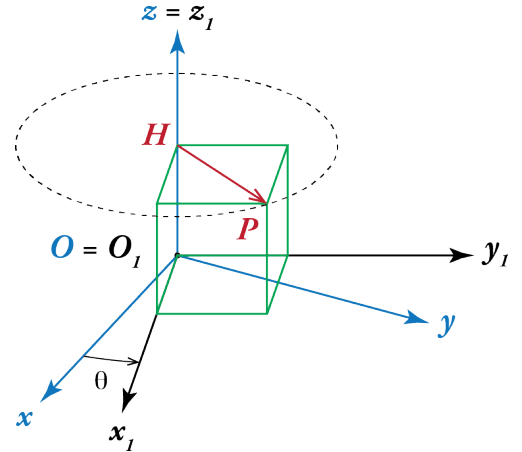
où $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}$ est la vitesse de P dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Remarque : On associe souvent un vecteur rotation $\vec{\Omega}$ à un mouvement de rotation autour d'un axe Δ porté par le vecteur $\vec{u}_z$ tel que : $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$. Ainsi on montre que

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OP} \quad \forall O \in \Delta$$

En effet, puisque $\vec{OP} = \vec{OH} + \vec{HP} = z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$, on a

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge (z\vec{u}_z + r\vec{u}_r) = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$



Le mouvement d'un point P lié à un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ est un mouvement circulaire situé dans le plan perpendiculaire à Δ contenant P . La trajectoire est caractérisée par :

- son centre H , projeté orthogonal de P sur Δ
- son rayon r , distance de P à Δ
- sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$, vitesse de rotation du solide autour de Δ .

Dans le système de coordonnées cylindriques d'origine O et d'axe (Oz) , la vitesse instantanée du point P s'écrit :

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

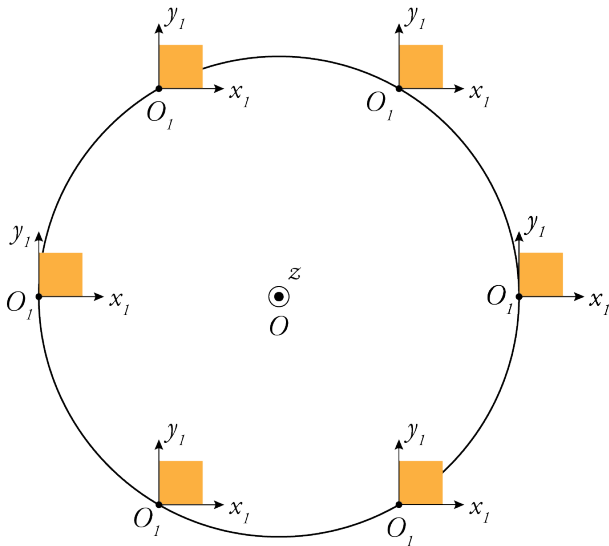
Il suffit donc d'une coordonnée angulaire θ pour décrire la position du solide. On est donc ramené au cas du mouvement circulaire de la cinématique du point.

Remarque : L'axe de rotation n'est pas forcément situé à l'intérieur du solide !

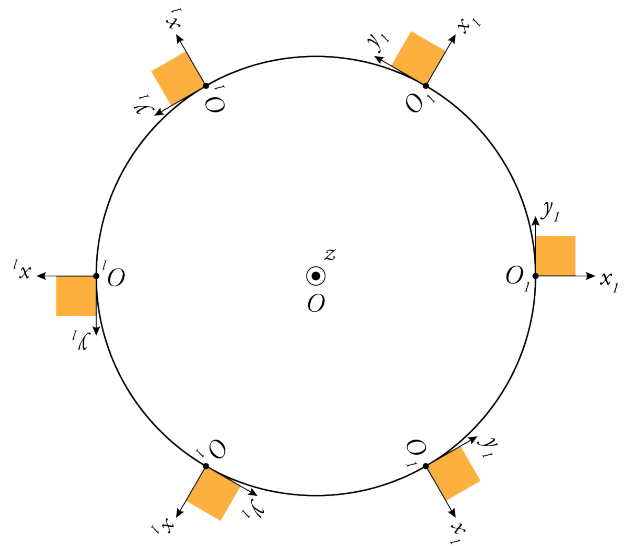
Conséquences : Le déplacement angulaire infinitésimal $d\theta$, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ sont identiques pour les points du solide. On peut donc parler sans ambiguïté de la rotation et de la vitesse de rotation du solide. De plus, le mouvement du solide est parfaitement défini par la donnée du déplacement angulaire d'un de ses points, on parle d'un mouvement à 1 degré de liberté.

Remarque : Attention à ne pas confondre le mouvement de rotation autour d'un axe et le mouvement de translation circulaire. Dans le cas de la translation circulaire les axes restent toujours parallèles à tout instant.

Translation circulaire



Rotation d'axe (Oz)



4.4 Mouvement quelconque (HP)

On peut décomposer un mouvement quelconque en :

- le mouvement du centre de masse G du système
- la rotation autour d'un axe passant par G



On appelle référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ le référentiel lié à G et en translation par rapport à $\mathcal{R}$.

Conséquence : Dans $\mathcal{R}^*$, le solide a un mouvement de rotation d'axe passant par G caractérisé par $\vec{\Omega}$. On peut alors décrire le mouvement d'un point P quelconque de ce solide par la formule (dite de Varignon) :

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GP}$$