

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Puissance et travail d'une force.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force. Savoir que la puissance dépend du référentiel.
Théorème de l'énergie cinétique et théorème de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et connaître les expressions des énergies potentielles de pesanteur (champ uniforme), énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), énergie potentielle élastique, énergie électrostatique (champ uniforme et champ créé par une charge ponctuelle). Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Dédire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif. Mouvement conservatif à une dimension.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales. Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Dédire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle. Expliquer qualitativement le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Dédire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.

Plan

1 Puissance et travail d'une force

- 1.1 Notations
- 1.2 Puissance d'une force
- 1.3 Du travail élémentaire au travail total d'une force
- 1.4 Quelques exemples

2 Théorème de l'énergie cinétique

- 2.1 Définition
- 2.2 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique
- 2.3 Interprétation physique
- 2.4 Exemple : tremplin à ski

3 Forces conservatives et énergie potentielle

- 3.1 Gradient d'un champ scalaire
- 3.2 Définition
- 3.3 Expressions de quelques énergies potentielles
- 3.4 Forces non conservatives

4 Bilan : énergie mécanique

- 4.1 Définition et théorème
- 4.2 Non conservation de l'énergie mécanique
- 4.3 Étude énergétique du pendule simple
- 4.4 Mouvement d'un point sur une sphère

5 Mouvement conservatif à un degré de liberté

- 5.1 Cadre du problème
- 5.2 Étude qualitative du mouvement
- 5.3 Analyse de stabilité des points d'équilibre
- 5.4 Profil d'énergie potentiel et portrait de phase

Vérification des connaissances

	Connaissances
☐	Travail d'une force : définition mathématique, signe en fonction du caractère résistant/moteur de la force.
☐	Puissance d'une force : définition mathématique, signe en fonction du caractère résistant/moteur de la force, influence du référentiel.
☐	Théorème de l'énergie cinétique : énoncé, utilisation, méthode d'application.
☐	Théorème de la puissance cinétique : énoncé, utilisation, méthode d'application.
☐	Forces conservatives : définition, exemples, contre-exemples.
☐	Énergie potentielle : définition mathématique, expressions des E_p de pesanteur, gravitationnelle, élastique, électrostatique (démonstrations des expressions à connaître)
☐	Gradient d'une fonction : définition, propriétés, expressions en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
☐	Énergie mécanique : définition, propriété pour les mouvements conservatifs.
☐	Positions d'équilibre stable et instable : définition, propriété de l'énergie potentielle et de ses dérivées première et seconde.
☐	Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable : approximation locale de l'énergie potentielle et équation du mouvement associée.

	Capacités
☐	Calculer le travail et la puissance d'une force sur un trajet.
☐	Choisir la loi énergétique appropriée en fonction du contexte.
☐	Calculer l'expression de l'énergie potentielle associée à une force conservative (en utilisant le gradient ou la forme différentielle).
☐	Analyser un graphique d'énergie potentielle : comportement qualitatif du système (trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, points de vitesse nulle) ; positions d'équilibre stable et instable.
☐	Tracer un portrait de phase en accord avec un graphique d'énergie potentielle pour une énergie mécanique donnée.
☐	A partir d'un graphique d'énergie potentielle, évaluer l'énergie minimale ou la vitesse à fournir au système pour qu'il franchisse la barrière de potentiel.

1 Puissance et travail d'une force

1.1 Notations

Soit un point M soumis à une force $\vec{f}$ et en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. A l'instant t , M est en $M(t)$. A $t + dt$, il se trouve en $M(t + dt)$. Si dt est infiniment petit, $M(t + dt)$ est très proche de $M(t)$, le déplacement infinitésimal $d\vec{OM}$ s'exprime donc par $d\vec{OM} = \vec{M}(t)M(t + dt)$. D'autres part, nous avons $d\vec{OM} = \vec{v} dt$.

1.2 Puissance d'une force

 La puissance $\mathcal{P}$ de la force $\vec{f}$ appliquée au point matériel M en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Remarque : $\mathcal{P}$ est une grandeur additive. Et puisque $\vec{v}$ dépend du référentiel, la puissance aussi.



Propriété :

- Si $\mathcal{P}(\vec{f}) > 0$, la force est motrice
- Si $\mathcal{P}(\vec{f}) < 0$, la force est résistante
- Si la force est perpendiculaire au mouvement, la force ne travaille pas, $\mathcal{P}(\vec{f}) = 0$

1.3 Du travail élémentaire au travail total d'une force



Le travail élémentaire $\delta W(\vec{f})$ d'une force $\vec{f}$ de puissance $\mathcal{P}(\vec{f})$ appliquée à un point matériel M pendant un intervalle de temps dt s'écrit :

$$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}(\vec{f}) dt$$

Remarque : La notation du travail élémentaire est bien « δ » et pas « d » : « d » est réservé à la différentielle. Le travail n'est pas défini à t et à $t + dt$, mais correspond à une petite quantité d'énergie échangée pendant l'intervalle de temps dt .



Propriété :

$$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}(\vec{f}) dt = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$



Le travail total d'une force le long du déplacement $\widehat{AB}$ de A à B où M passe de A à t_A vers B à t_B ($t_B > t_A$) est défini par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_{AB} \delta W(\vec{f})$$

Remarque :

- $\int_{M \in AB}$ signifie qu'il faut intégrer le long de la trajectoire, c'est une intégrale curviligne.
- A priori $W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$ dépend de $\vec{f}$ et du chemin allant de A à B .
- $W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_{AB} \delta W(\vec{f}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\vec{f}) dt = \int_{M \in AB} \vec{f} \cdot d\vec{OM}$. Cette dernière expression est appelée « circulation de $\vec{f}$ » le long du chemin AB .

1.4 Quelques exemples

1.4.1 Force perpendiculaire au mouvement

Si $\vec{f}$ reste en permanence perpendiculaire à $\vec{v}$, $\vec{f} \cdot \vec{v} = 0$, sa puissance est donc nulle. Par conséquent

$$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = 0$$

On dit alors que la force ne travaille pas.

Exemples : la réaction normale d'un support, la force magnétique.

1.4.2 Travail d'une force constante

Soit une force constante $\vec{f}_0$, on définit un axe (Ox) tel que $\vec{u}_x = \frac{\vec{f}_0}{\|\vec{f}_0\|}$. Le point M est repéré par la coordonnée selon l'axe (Ox) . Alors

$$\mathcal{P}(\vec{f}_0) = \vec{f}_0 \cdot \vec{v} = f_0 \vec{u}_x \cdot \vec{v} = f_0 \dot{x}$$

On en déduit son travail élémentaire :

$$\delta W(\vec{f}_0) = \mathcal{P}(\vec{f}_0) dt = f_0 \dot{x} dt = f_0 dx$$

Si on note x_A et x_B les coordonnées des points A et B sur l'axe (Ox) , on a :

$$W_{AB}(\vec{f}_0) = \int_{M \in AB} \delta W(\vec{f}_0) = \int_A^B f_0 dx = f_0(x_B - x_A)$$

Remarque :

- $W_{AB}(\vec{f}_0)$ ne dépend que de f_0 et des positions de départ et d'arrivée.
- Le travail élémentaire **peut dans ce cas** s'écrire comme une différentielle : $\delta W(\vec{f}_0) = d(f_0 x)$ Par conséquent, pour une trajectoire partant et revenant au même point A , on a $W_{AA}(\vec{f}_0) = f_0(x_A - x_A) = 0$. Une force constante est donc une force **conservative**.

1.4.3 Travail d'une force de frottement de norme constante

On considère une force de frottement $\vec{f}$ dont la norme est constante. Par définition d'une force de frottement, $\vec{f}$ est opposée à la vitesse, sa puissance est toujours négative :

$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v} = -f \|\vec{v}\| < 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W(\vec{f}) = -f \|\vec{v}\| dt = -f d\ell$$

où $d\ell$ est la longueur du vecteur déplacement infinitésimal. En intégrant sur le chemin de A à B , on a donc

$$W_{AB}(\vec{f}) = -f \ell_{AB}$$

avec ℓ_{AB} la longueur du chemin allant de A à B . Dans ce cas le travail ne peut pas s'écrire comme une différentielle. Sur une trajectoire fermée, le travail d'une force de frottement est strictement négatif, c'est une force dissipative.

2 Théorème de l'énergie cinétique

2.1 Définition

L'énergie cinétique d'un point matériel M , de masse m et animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est une grandeur scalaire :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Remarque : $\vec{v}$ dépend du référentiel, donc E_c aussi.

2.2 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique

On considère un point matériel M de masse m soumis à des forces $\vec{f}_i$ et en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$.



Théorème de la puissance cinétique (TPC)

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances des forces qui s'exercent sur ce point :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$$



Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés :

$$\Delta E_c = E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_i W_{AB}(\vec{f}_i)$$

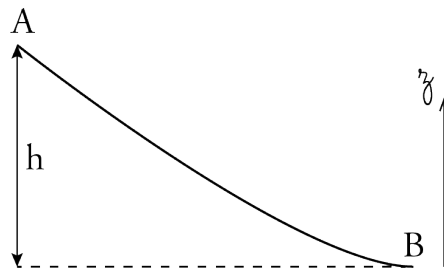
Démonstration :

2.3 Interprétation physique

Bilan : Quand utiliser ces théorèmes ? Comme il s'agit du PFD projeté sur la trajectoire, on a donc perdu des informations. Par contre, c'est très utile dans des problèmes à une variable, problème dit à « un degré de liberté ».

2.4 Exemple : tremplin à ski

Un skieur s'élance du point A en haut d'un tremplin, sans élan, jusqu'au point B en tête de tremplin. La longueur de la piste d'élan vaut $L = 100$ m pour un dénivelé de $h = 50$ m. Par une approche énergétique déterminer la vitesse du skieur en B en négligeant tout frottement. En réalité, en sortie de tremplin, la vitesse du skieur vaut $v_B = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer le travail des forces de frottement pour un skieur de masse $m = 80$ kg.



3 Forces conservatives et énergie potentielle

3.1 Gradient d'un champ scalaire



Le gradient d'un champ scalaire $U(M)$, fonction des coordonnées de l'espace, est un champ vectoriel noté $\overrightarrow{\text{grad}} U(M)$, défini de la manière suivante : la différentielle dU du champ pour un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est :

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Conséquence :

- Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} U$ est orthogonal aux isosurfaces, c'est-à-dire aux surfaces $U = \text{cst}$ (surfaces de niveau).
- Le gradient est orienté dans le sens des U croissants.

Le gradient d'une fonction U est une grandeur intrinsèque, indépendante du choix d'un système de coordonnées. Mais son expression dépend du système de coordonnées.

3.1.1 Expressions dans les différents systèmes de coordonnées

Traisons le cas des cartésiennes : la fonction U est une fonction des coordonnées de l'espace x, y et z . Par définition de la différentielle, on peut écrire

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{x,y} dz$$

On note en indice les variables supposées constantes au cours de la dérivation : par exemple $\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y,z}$ est la dérivée partielle de U en tant que fonction de x uniquement, les variables y et z étant supposées fixes.

D'autres part, on peut exprimer le produit scalaire précédent :

$$dU = \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_x dx + \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_y dy + \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_z dz$$

où $\left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_x$ désigne la composante selon x du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} U$. On identifie alors composante par composante...

Cartésiennes
($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$)

Cylindrique
($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$)

Sphérique
($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$)

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{x,z} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{x,y} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\theta,z} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{r,z} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{r,\theta} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\theta,\varphi} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{r,\varphi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)_{r,\theta} \end{pmatrix}$$

3.1.2 Interprétation physique

La notion de gradient permet de quantifier la variation spatiale d'une grandeur. Par exemple, une variation de température ou de densité selon un axe se traduit par un gradient. Le gradient permet de définir la « normale aux courbes de niveau » comme dans la lecture d'une carte topographique.

3.2 Définition

 Une force $\vec{f}$ est dite conservative ou qu'elle dérive d'un potentiel si le travail $W_{AB}(\vec{f})$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des points A et B . On peut alors écrire

$$W_{AB}(\vec{f}) = E_p(A) - E_p(B)$$

E_p est appelée « énergie potentielle » de la force $\vec{f}$. Au niveau infinitésimal on peut alors écrire : $\delta W(\vec{f}) = -dE_p$

Conséquence :

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\vec{OM} \quad \text{et} \quad \delta W(\vec{f}) = -dE_p = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{OM}$$

Une force conservative et l'énergie potentielle associée sont liées par

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

Remarque :

- L'énergie potentielle est définie à partir de sa variation. Elle est donc déterminée à une constante près. En général, on fixera une référence de l'énergie potentielle en un point O .

- ↪ **Application 1** : On étudie un dipôle électrostatique constitué de deux charges $-q$ et $+q$ distantes d'une longueur a . Le potentiel électrique créé en un point M loin de ce dipôle s'écrit en coordonnées cylindriques : $V(M) = \frac{aq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$. Déterminer l'expression du champ électrique associé $\vec{E}$ sachant que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$.

↪ **Application 2** : Un champ vectoriel s'exprime en cartésiennes par $\vec{a} = \begin{pmatrix} -x^2 + 6xz + z^2 \\ 2R^2 - 3y^2 \\ 3x^2 + 2xz - 3z^2 \end{pmatrix}$. On montre que ce champ vectoriel dérive d'un potentiel donc qu'il peut s'écrire $\vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, déterminer le potentiel V sachant que $V(0, R, 0) = 0$.

3.3 Expressions de quelques énergies potentielles

3.3.1 Poids et énergie potentielle de pesanteur

Le poids d'un objet de masse m s'écrit $\vec{P} = m\vec{g}$. Avec un axe vertical, orienté vers le haut, la projection du poids s'écrit $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$. On en déduit :

$$\delta W = -mg \vec{u}_z \cdot d\vec{OM} = -mg \, dz = -d(mgz) = -dE_p \quad \Rightarrow \quad E_{pp} = mgz + C$$

où C est une constante d'intégration choisie arbitrairement. Si (Oz) est vertical ascendant, on peut choisir C comme l'énergie potentiel de référence à l'origine du repère ou au niveau du point à l'instant initial. Dans ce cas, on retiendra :

$$E_{pp} = mgh \quad \text{où } h \text{ est l'altitude}$$

3.3.2 Force gravitationnelle et énergie potentielle gravitationnelle

Soit un point M de masse m , soumis à l'attraction gravitationnelle d'un astre de centre O et de masse m_P . On repère le point M en coordonnées sphériques. Montrer que $\vec{u}_r \cdot d\vec{OM} = dr$, puis en déduire l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle sachant qu'on considère l'énergie potentielle nulle à l'infini (loin de l'astre).

3.3.3 Force de rappel et énergie potentielle élastique

Un ressort de raideur k subissant un allongement $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ exerce une force $\vec{F} = -k\Delta\ell \vec{u}_{ext}$ où $\vec{u}_{ext}$ est dirigé du ressort vers le système. On a donc :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -k\Delta\ell \vec{u}_{ext} \cdot d\vec{OM}$$

$\overrightarrow{u_{ext}} \cdot d\overrightarrow{OM}$ est la projection du déplacement élémentaire dans la direction du ressort : il s'agit donc de la variation de la longueur $d\ell$ du ressort :

$$\delta W = -k(\ell - \ell_0) \, \mathrm{d}\ell = - \, \mathrm{d}E_p \qquad \Rightarrow \qquad E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + C$$

On choisit C telle que $E_p = 0$ lorsque le ressort est à vide. On a donc :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

3.3.4 Force électrique et énergie potentielle électrostatique

Un point matériel M de charge q est soumis à la force coulombienne créée par une charge q_P placée en P :

$$\overrightarrow{F_{PM}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_P}{r^2} \overrightarrow{u_r} \quad \text{avec} \quad r = \|\overrightarrow{PM}\| \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

3.4 Forces non conservatives

Les forces de frottements sont non conservatives. Prenons l'exemple de la force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$, on a alors :

$$\delta W = \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{OM} = -\lambda v^2 dt < 0$$

On ne peut pas l'écrire sous la forme d'une différentielle : il ne s'agit pas d'une force conservative. Par ailleurs, son travail est toujours négatif, c'est une force dissipative.

4 Bilan : énergie mécanique

4.1 Définition et théorème



La somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles forme l'énergie mécanique d'un point matériel.



Théorème de l'énergie mécanique (TEM) : l'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas est une constante du mouvement.

Démonstration :

Remarque : Pour un mouvement conservatif, E_m se conserve. Elle n'est fonction que de la position, de ses dérivées premières par rapport au temps : $E_m(x, \dot{x})$. On dit alors que l'énergie mécanique est **une intégrale première du mouvement**.

4.2 Non conservation de l'énergie mécanique

On rassemble les forces en deux catégories : forces conservatives $\vec{f}_c$ et non conservatives $\vec{f}_{nc}$. Le travail total s'écrit donc :

$$W_{\text{tot}} = W(\vec{f}_c) + W(\vec{f}_{nc}) = -\Delta E_p + W(\vec{f}_{nc})$$

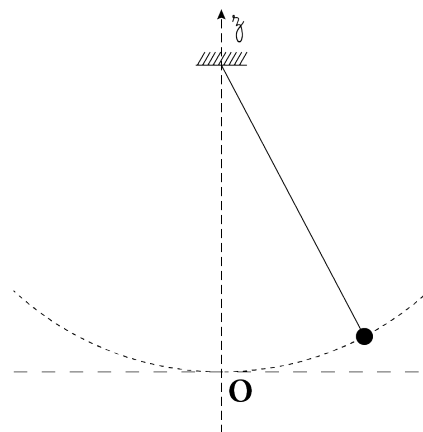
Appliquons le TEC :

$$\Delta E_c = W_{\text{tot}} = -\Delta E_p + W(\vec{f}_{nc}) \quad \Rightarrow \quad \Delta E_m = W(\vec{f}_{nc})$$

ou bien sous forme élémentaire $dE_m = \delta W(\vec{f}_{nc})$: la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives.

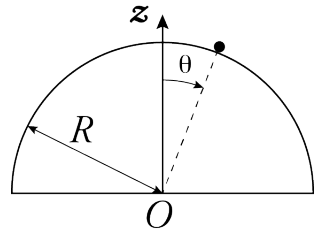
4.3 Étude énergétique du pendule simple

On reprend le système déjà étudié au chapitre précédent : on étudie le mouvement d'une masse m suspendue à un fil idéal dont l'autre extrémité est fixe. Ce mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. A l'instant initial, la masse est lâchée d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.



4.4 Mouvement d'un point sur une sphère

Reprenons l'exemple de l'igloo : on étudie le mouvement d'un objet de masse m qui glisse sur le toit hémisphérique d'un igloo de rayon R . Il part du sommet avec une vitesse initiale négligeable. Aucun frottement n'a lieu entre l'objet et la glace. On repère la position du point M en coordonnées polaires.



5 Mouvement conservatif à un degré de liberté

5.1 Cadre du problème

On s'intéresse au mouvement d'un point M de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Compte tenu des liaisons, il ne possède qu'un seul degré de liberté noté x , unique paramètre de position. Il peut s'agir de l'abscisse sur une trajectoire rectiligne, de l'angle sur une trajectoire circulaire ou bien de l'abscisse curviligne sur une trajectoire quelconque. On fait aussi l'hypothèse que les forces exercées sur M sont conservatives et dérivent donc d'une énergie potentielle, ou bien qu'elles ne travaillent pas. On peut donc écrire le TEM pour un tel système :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = E_m = \text{cste}$$

En dérivant par rapport au temps, on retrouve le PFD : parfaitement logique puisque l'équation précédente est l'intégrale première du mouvement :

$$m\ddot{x} + \frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = F(x)$$

Ces équations permettent une étude complète : (1) description qualitative du mouvement, (2) l'existence et la stabilité des positions d'équilibre et (3) l'analyse des petits mouvements autour de l'équilibre.

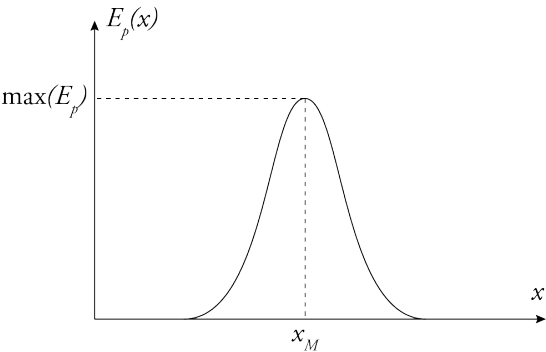
5.2 Étude qualitative du mouvement

De l'intégrale première du mouvement, on déduit :

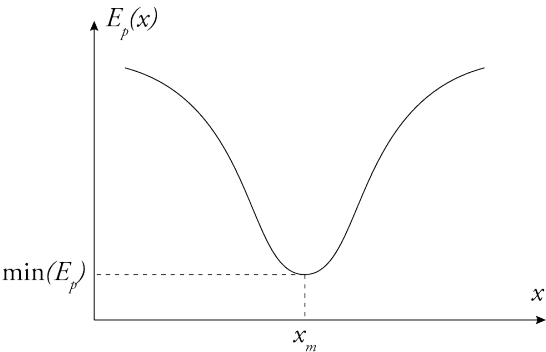
$$E_m - E_p(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \geq 0$$

Pour qu'il y ait mouvement ($\dot{x} \neq 0$), il faut donc que l'énergie mécanique E_m soit supérieure à l'énergie potentielle.

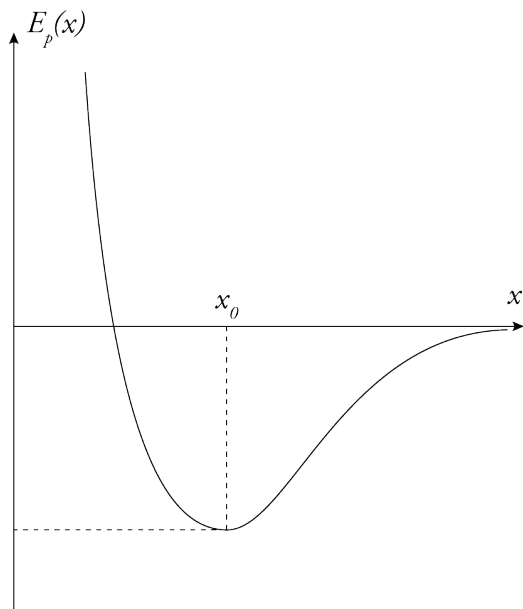
5.2.1 Barrière de potentiel



5.2.2 Puits de potentiel



5.2.3 Potentiel interatomique ou du type Lennard-Jones



5.3 Analyse de stabilité des points d'équilibre

5.3.1 Définition et conséquence énergétique



Un point M est à une position d'équilibre $x = x_{\text{eq}}$ si lorsqu'on place le point M à $t = 0$ en $x(t = 0) = x_{\text{eq}}$ avec une vitesse initiale $\dot{x}(t = 0) = 0$, il y demeure pour tout $t > 0$. Alors $x(t) = x_{\text{eq}} \quad \forall t > 0$.

Conséquence : Si M est à une position d'équilibre alors $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$. Le PFD implique donc qu'en ce point $\sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$.

Soit E_p l'énergie potentielle totale des forces exercées sur M . E_p ne dépend aussi que d'une variable de position x . Le travail des forces s'écrit :

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{OM} = f_x(x) dx = -dE_p \quad \Rightarrow \quad f_x(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

Chercher les positions d'équilibre revient à chercher les points où $\vec{f}$ s'annule, cela implique donc de chercher x tel que la dérivée de E_p s'annule :



Une position d'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle. Son abscisse x_{eq} vérifie :

$$\left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x=x_{\text{eq}}} = 0$$

5.3.2 Stabilité des équilibres

On vient de voir que la résultante des forces dérivant d'énergies potentielles (dont le total est E_p) pouvait s'écrire

$$\vec{f} = f_x(x) \vec{u}_x = -\frac{dE_p}{dx} \vec{u}_x$$

Par conséquent, en un point d'abscisse x , la force $\vec{f}$ est dirigée dans le sens des potentiels décroissants.

Soit $x = x_{\text{eq}}$ une position d'équilibre. Si on écarte le point de sa position d'équilibre et qu'il y revient, la position d'équilibre est stable. Dans le cas contraire, l'équilibre est instable. Si x_{eq} est un minimum d'énergie potentielle, $\vec{f}$ tend à ramener le mobile vers x_{eq} , l'équilibre est stable. Si x_{eq} est un maximum d'énergie potentielle, $\vec{f}$ tend à éloigner le mobile de x_{eq} , l'équilibre est instable.

Réalisons un DL de la force f_x au voisinage de la position d'équilibre :

Une position d'équilibre x_{eq} est si l'énergie potentielle y est : $\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}}$

Une position d'équilibre x_{eq} est si l'énergie potentielle y est : $\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}}$

5.3.3 Petits mouvements autour de l'équilibre

On considère un point matériel de masse m soumis à une unique force $\vec{f}$ conservative dirigée selon $\vec{u}_x$ et ne dépendant que de x . Le DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre s'écrit :

Fixons la référence de l'énergie potentielle au niveau de la position d'équilibre et posons $k = \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}}$, il vient :

5.4 Profil d'énergie potentiel et portrait de phase

5.4.1 Définitions

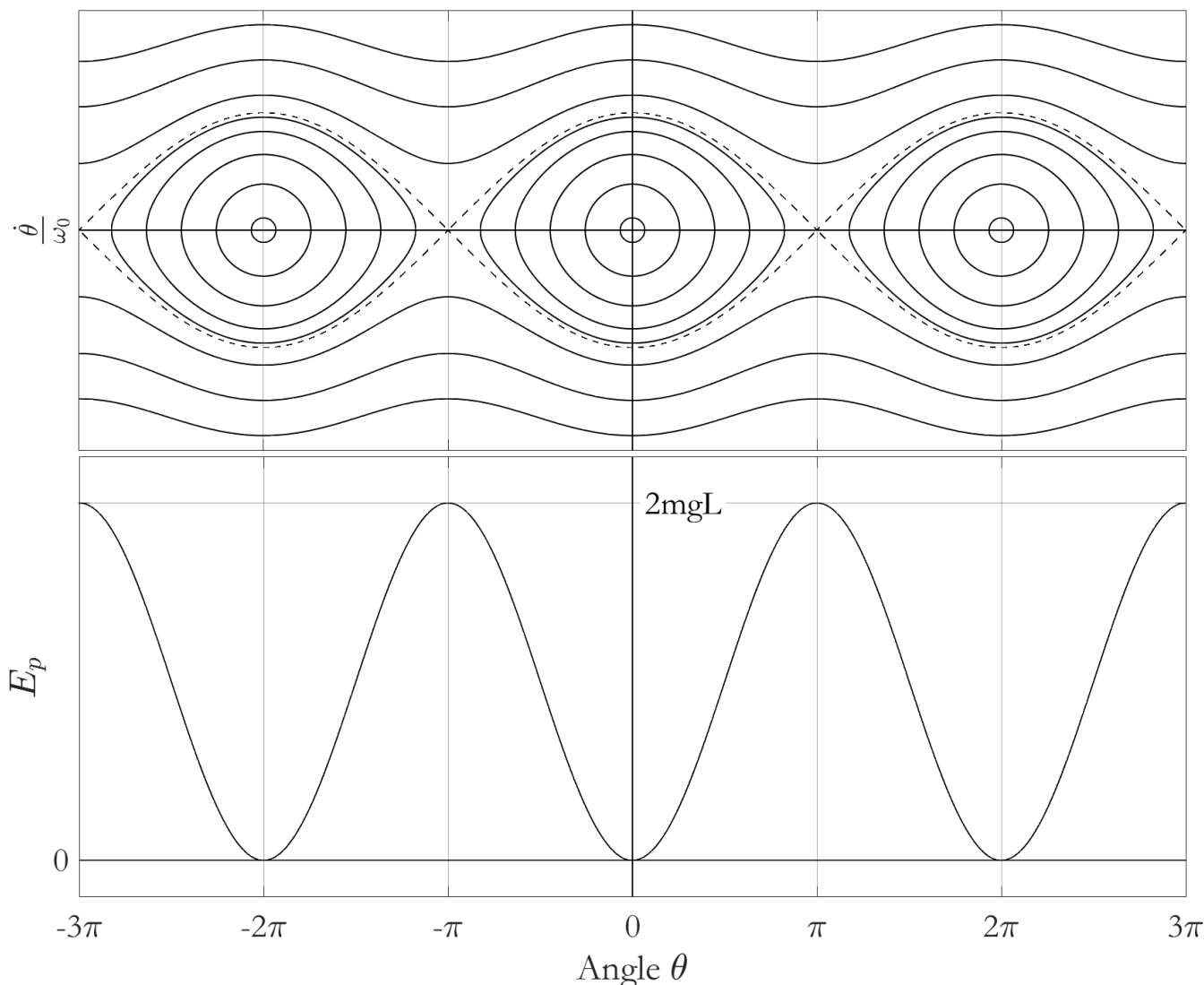


- On appelle **plan de phase** le plan $(x, \dot{x})$.
- Au cours du temps et avec des conditions initiales données, le point M décrit une courbe dans le plan de phase : à tout instant t , on connaît position $x(t)$ et vitesse $\dot{x}(t)$. Cette courbe s'appelle la **trajectoire de phase**.
- Le déterminisme de la mécanique classique impose que chaque CI donne une unique trajectoire de phase.
- L'ensemble des trajectoires de phase (pour des CI différentes) forme le **portrait de phase** du système.

5.4.2 Lecture d'un portrait de phase : exemple du pendule simple

Le portrait de phase du pendule simple et l'énergie potentielle sont tracés dans le graphe ci-dessous. On rappelle que

$$E_p = mgL(1 - \cos \theta)$$



- Les trajectoires de phases sont parcourues de gauche à droite dans le demi-plan supérieur et de droite à gauche dans le demi-plan inférieur.
- Les mouvements périodiques correspondent à des trajectoires de phase fermées décrites dans le sens horaire. La courbe limite, en pointillées, est appelé séparatrice.
- Les trajectoires de phase ne se croisent pas.
- Une trajectoire de phase coupe généralement l'axe (Ox) selon la verticale.
- Le portrait de phase est symétrique par rapport à l'axe (Ox) lorsque le phénomène est réversible.
- Les positions d'équilibre stables sont entourées de trajectoires de phase elliptiques.
- La trajectoire de phase d'un oscillateur harmonique forme un cercle dans le plan $(x, \frac{\dot{x}}{\omega_0})$

↪ **Application 3** : Placer les énergies suivantes et identifier la trajectoire de phase associée :

- E_0 qui correspond à la séparatrice.
- E_1 d'un mouvement d'oscillation
- E_2 d'un mouvement de révolution.