

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique

Mécanique - Chap 4

MPSI 2

Aux Lazaristes

2025-2026

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
Puissance de la force de Lorentz.	Savoir qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur-accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour calculer la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel. Citer une application.
Mouvement circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur-vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique.	Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire. Citer une application.

Plan

1 Force de Lorentz, champ électrique et champ magnétique

- 1.1 Expression de la force
- 1.2 Aspects énergétiques et conséquences
- 1.3 Ordres de grandeur et conséquences

2 Mouvement d'une particule dans un champ électrique

- 2.1 Équation du mouvement
- 2.2 Analyse de la trajectoire
- 2.3 Application à la déflexion électrique
- 2.4 Accélération d'une particule chargée

3 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique

- 3.1 Trajectoire et caractéristiques
- 3.2 Expérience de Thomson
- 3.3 Le cyclotron

Vérification des connaissances

	Connaissances
☐	Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle.
☐	Ordres de grandeur : champ électrique, champ magnétique, comparaison de la valeur de la force de Lorentz avec la pesanteur pour une particule chargée.
☐	Influence d'un champ électrique et d'un champ magnétique sur la vitesse et la trajectoire d'une particule chargée ; justification par analyse énergétique.
☐	Expression du champ électrique créé par différence de potentiel entre 2 armatures conductrices.
☐	Applications : spectromètre de masse et cyclotron (utilisation, utilité du champ électrique et du champ magnétique).

	Capacités
☐	Mettre en équation le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.
☐	Utiliser l'approche énergétique pour déterminer l'évolution de la vitesse (scalaire) d'une particule dans un champ électrique et/ou magnétique.
☐	Mettre en équation le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dont la vitesse initiale est perpendiculaire au champ.

Introduction

L'électromagnétisme, c'est l'étude de l'interaction entre des corps chargés au repos ou en mouvement. On décrit alors cette interaction à l'aide d'un champ électromagnétique constitué d'un champ électrique $\vec{E}(M,t)$ et d'un champ magnétique $\vec{B}(M,t)$. Toute la complexité de l'électromagnétisme réside dans le couplage entre le mouvement des particules chargées et le champ électromagnétique qu'elles créent et qui modifie leur mouvement.

C'est un sujet de grande importance de par le nombre d'applications qui l'utilisent. Pour simplifier ces études, on se restreindra à des situations où le couplage n'existe plus : on étudiera donc le mouvement de particules dans des champs électriques et magnétiques imposés par l'extérieur, uniformes et indépendants du temps. On exclura aussi tout développement relativiste même si dans les grands accélérateurs, la vitesse des particules peuvent approcher la vitesse de la lumière. Par exemple au LHC (*Large Hadron Collider* - Grand collisionneur de hadrons au CERN, dans la banlieue de Genève), les protons circulent à $v = c - 2,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $v/c = 1 - 9 \times 10^{-9}$ lorsqu'elles ont une énergie de 7 TeV (10^{12} eV).

On peut citer quelques applications naturelles ou artificielles :

1 Force de Lorentz, champ électrique et champ magnétique

Remarque : *Hendrik Antoon Lorentz, 1853 - 1928, physicien néerlandais. Il a notamment travaillé sur la nature de la lumière et la constitution de la matière. Prix Nobel en 1902 pour des études sur la magnétisme et les phénomènes radiatifs.*

1.1 Expression de la force

Dans un référentiel donné, une particule chargée de charge q , animée d'une vitesse $\vec{v}$ subit, en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$, la force de Lorentz :

$$\vec{F} = \dots\dots\dots$$

Remarques :

- $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}$ dépendent du référentiel.
- La force électrique $\vec{F}_{\text{elec}}$ est de même direction que $\vec{E}$, mais son sens dépend du signe de q .
- $\vec{F}_{\text{mag}}$ est définie par le produit vectoriel : on utilise la règle de la main droite :

- Dimensions et unités :

1.2 Aspects énergétiques et conséquences

1.2.1 Force magnétique

Par définition $\vec{F}_{\text{mag}} = \dots\dots\dots$ est orthogonale à la vitesse. Pour une particule de charge q en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}$, on a donc :

Le travail et la puissance de la force magnétique sont nuls. Il est donc impossible d'augmenter l'énergie cinétique d'une particule au moyen d'un seul champ magnétique indépendant du temps. Un tel champ ne permet que de courber la trajectoire des particules : $\vec{B}$ agit sur la **direction** de $\vec{v}$.

1.2.2 Force, énergie et potentiel électriques

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, la puissance de la force électrique subie par une particule de charge q et animée d'une vitesse $\vec{v}$ s'écrit :

Le travail élémentaire :

On choisit un axe (Oz) de telle sorte que $\vec{E} = E\vec{u}_z$, on a donc :

$\vec{F}_{\text{elec}}$ est donc une force conservative puisqu'elle dérive de l'énergie potentielle électrique :

$$E_p = \dots\dots\dots$$



On définit le potentiel électrique, noté V par la relation :

$$E_p = qV$$

Dans le cas où $\vec{E} = E\vec{u}_z$, le potentiel électrique s'écrit :

$$V(z) = -Ez + C$$

Vous verrez en spé qu'en généralisant à tout l'espace, on écrira :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

Remarques :

- V ne dépend pas de la charge q mais uniquement du champ électrique $\vec{E}$.
- C'est le même potentiel défini en électrocinétique.
- La constante C est choisie par un potentiel électrique de référence, en général nul, ce qui correspond à la masse d'un circuit.
- $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

Le travail de la force électrique $W_{AB}(\vec{F}_{\text{elec}})$ entre les points A et B s'écrit ainsi :

$$W_{AB}(\vec{F}_{\text{elec}}) = -\Delta E_p = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

où $\dots\dots\dots$ est la différence de potentiel (tension) entre les points A et B .

Conclusion : la force électrique peut délivrer une puissance à une particule chargée. Elle peut donc la mettre en mouvement et modifier son énergie cinétique. La force électrique peut agir à la fois sur la norme et la direction de la vitesse.

1.3 Ordres de grandeur et conséquences

1.3.1 Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

1.3.2 Comparaison force électrique / force magnétique

Comparer l'ordre de grandeur des deux forces pour un électron animé d'une vitesse $v = 10\%c$ avec $B \simeq 0,1$ T.

Pour de telles vitesses, la force magnétique d'un champ magnétique faible est aussi importante que la force électrique d'un champ électrique intense. Pour dévier des particules chargées allant à grande vitesse, il est donc préférable d'utiliser des champs magnétiques.

1.3.3 Comparaison au poids de la particule

Considérons un proton de masse $m_p = \dots\dots\dots$ kg dans le champ de pesanteur terrestre. L'ordre de grandeur du poids est $P = mg = \dots\dots\dots$ N.

Évaluer l'ordre de grandeur pour la force électrique avec un champ très faible de l'ordre de 10^2 V·m⁻¹

Évaluer l'ordre de grandeur de la vitesse que devrait avoir un proton pour que la force magnétique soit du même ordre de grandeur que le poids. Comparer à la vitesse liée à l'agitation thermique $v \simeq 2 \times 10^3$ m·s⁻¹.

2 Mouvement d'une particule dans un champ électrique

2.1 Équation du mouvement

Soit une particule de masse m , de charge q en mouvement dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen. Elle est placée dans un milieu où règne un champ électrique uniforme et constant $\vec{E}$. Elle n'est donc soumise qu'à la force électrique, son poids est négligé.

Déterminer l'accélération, la vitesse et le vecteur position de la particule.

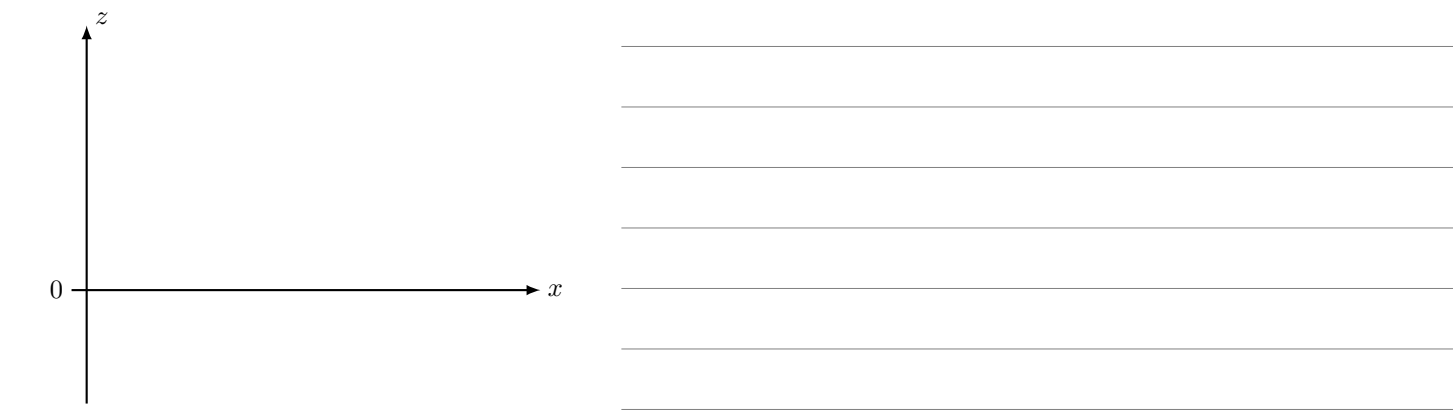
2.2 Analyse de la trajectoire

On se place en coordonnées cartésiennes et on choisit de placer l'axe (Oz) de telle sorte que $\vec{E} = E\vec{u}_z$ puis l'axe (Ox) pour que le plan xOz contienne le vecteur $\vec{v}_0$.

- si $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$ sont parallèles, le mouvement est rectiligne, on obtient directement l'équation d'un mouvement rectiligne uniformément varié :

$z(t) = \dots\dots\dots$

- si $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$ ne sont pas parallèles, on note α l'angle entre $\vec{v}_0$ et l'axe (Ox)



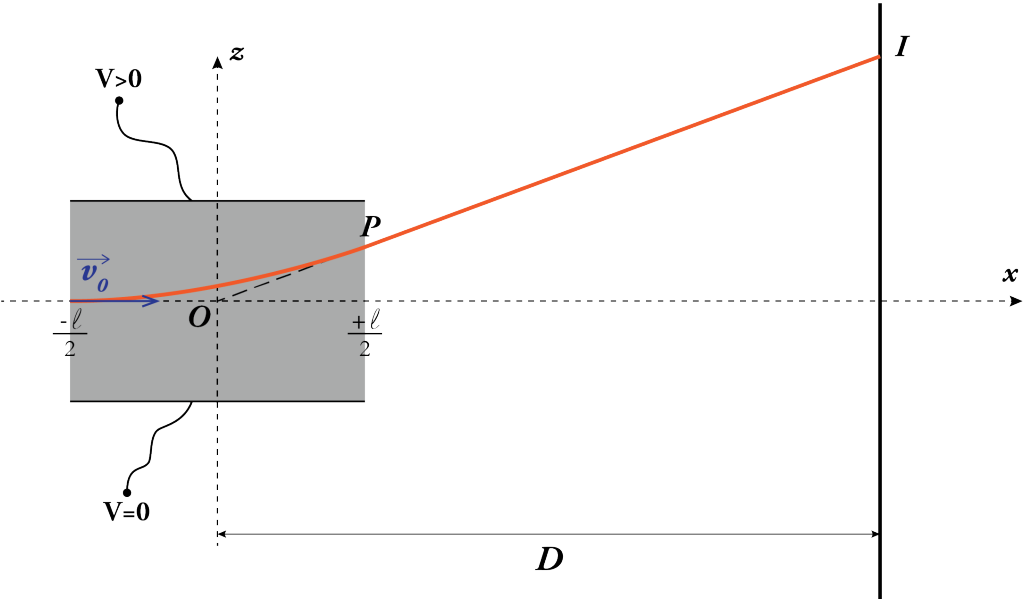
2.3 Application à la déflexion électrique

Un champ électrique permet de dévier un faisceau d'électrons dont le principe est schématisé ci-dessous.

- Un champ électrique est créé par deux électrodes planes parallèles et de longueur ℓ entre lesquelles on applique une différence de potentiel pour « charger » les électrodes. $\vec{E}$ est donc dirigé
..... $\Rightarrow \vec{E} = \dots\dots\dots$

- L'électron part du point $x_0 = -\frac{\ell}{2}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$. On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. D'après le paragraphe précédent, l'électron ($q = -e$) a une trajectoire parabolique dans la zone du champ électrique $\vec{E}$:

Il sort des armatures au point P tel que $x_P = +\frac{\ell}{2}$. Déterminer l'ordonnée $z(P)$ du point P :



A l'extérieur des armatures, il suit un mouvement jusqu'en I d'ordonnée $z(I)$. Déterminer l'équation de la trajectoire entre P et I et en déduire l'ordonnée $z(I)$ du point I .

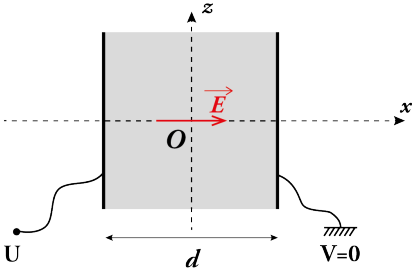
Remarques :

- La déviation $z(I)$ est proportionnelle au champ E entre les deux armatures et inversement proportionnelle à l'énergie cinétique initiale de l'électron.
- $z(I)$ dépend du rapport $\frac{e}{m}$ que l'on peut donc déterminer expérimentalement.
- Avec un champ électrique lentement variable, les calculs précédents restent valables et décrivent le mouvement de déviation des électrons dans les tubes cathodiques des oscilloscopes analogiques.

2.4 Accélération d'une particule chargée

On considère une particule de charge q et de masse m placée entre deux grilles métalliques planes perpendiculaires à l'axe (Ox) et distantes de d . En négligeant les effets de bord, on montrera en spé que le champ est uniforme entre les plaques. Nous avons établi que

$V(x) = \dots\dots\dots$



On fixe arbitrairement le potentiel de la grille de droite à la masse et donc la grille de gauche au potentiel U (la ddp). En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de U , d .

Application numérique : avec $U = 1 \text{ kV}$ entre deux plaques séparées de 1 cm , on a $E = \dots\dots\dots \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$.

Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule placée entre les deux grilles s'écrit :

• Prenons le cas d'une particule de charge positive placée très proche de la grille de potentiel le plus élevé et lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la vitesse finale v_f . Application numérique pour un proton et $U = 1 \text{ kV}$.

• Dans le cas d'une particule chargée négativement placée à proximité de la grille de potentiel le plus bas, on a :

 L'électron-volt (eV) est l'énergie acquise par une particule de charge e sous l'action d'un champ électrique associé à une différence de potentiel de 1 V.

Remarque : Pour se limiter à l'étude de particules non relativistes, on prendra des tensions inférieures à 1 ou 2 kV pour des électrons.

3 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique

3.1 Trajectoire et caractéristiques

On étudie le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et tel que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ de cette particule soit perpendiculaire à $\vec{B}$. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la particule de masse m et de charge q est donc soumise à la force magnétique : le PFD donne

$$m \vec{a} = \dots\dots\dots$$

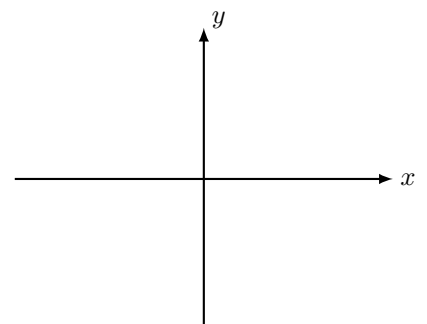
L'étude énergétique a montré que $\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{mag}}) = 0$ donc que le mouvement est uniforme. On choisit un axe (Oz) dans le sens du vecteur champ magnétique : $\vec{B} = B \vec{u}_z$ (avec $B > 0$). Puisque le champ magnétique impose une direction particulière, on choisit de repérer la particule chargée en coordonnées cylindriques d'axe (Oz). Projets le PFD sur cet axe, on obtient :

$$m \frac{dv_z}{dt} = \dots\dots\dots = \dots \quad \Rightarrow \quad v_z = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots$$

On en déduit donc que le mouvement est plan ($z = 0$). On peut alors exprimer l'accélération dans le repère de Frénet :

$$\vec{a} = \dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow \dots\dots\dots$$



On rappelle que la base directe de Frénet est définie par $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{T} \wedge \vec{N})$. On choisit alors le vecteur unitaire $\vec{u}_y$ tel que $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y = v_0 \vec{T}$, on a alors $\vec{T} \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$. Dans le cas d'une particule chargée positivement, on en déduit $\vec{N} = \vec{u}_x$ puisque le vecteur $\vec{N}$ est orienté vers l'intérieur de la trajectoire, d'où :

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Si la particule est de charge négative, on a alors $\vec{N} = -\vec{u}_x$ et

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

R est donc constante et vaut :

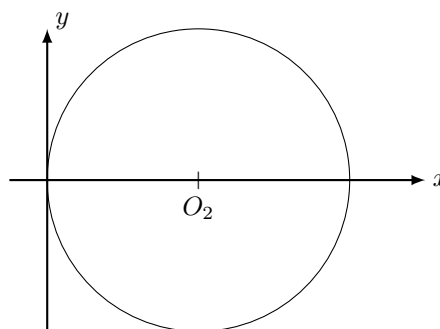
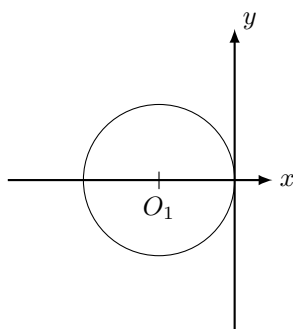
$$R = \dots\dots\dots$$

Dans ce cas (où $\vec{v}_0 \cdot \vec{B} = 0$), le mouvement d'une particule chargée est donc circulaire et uniforme de rayon $R = \dots\dots\dots$ et de pulsation $\omega_c = \dots\dots\dots$



On appelle $\dots\dots\dots$ la vitesse angulaire d'une particule en mouvement circulaire et uniforme soumise à un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant.

$$\omega_c = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$



Ordre de grandeur : une particule initialement accélérée sous 1 kV entre dans un milieu où règne un champ magnétique $\vec{B}$ de norme $B = 0,10$ T, calculer v_0 , ω_c , f_c et R pour un électron et pour un proton.

Remarque HP : Dans le cas où $\vec{v}_0$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{B}$, le mouvement est hélicoïdal : c'est la composition d'un MRU dans la direction de $\vec{B}$ et d'un MCU dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ (voir complément en fin de chapitre).

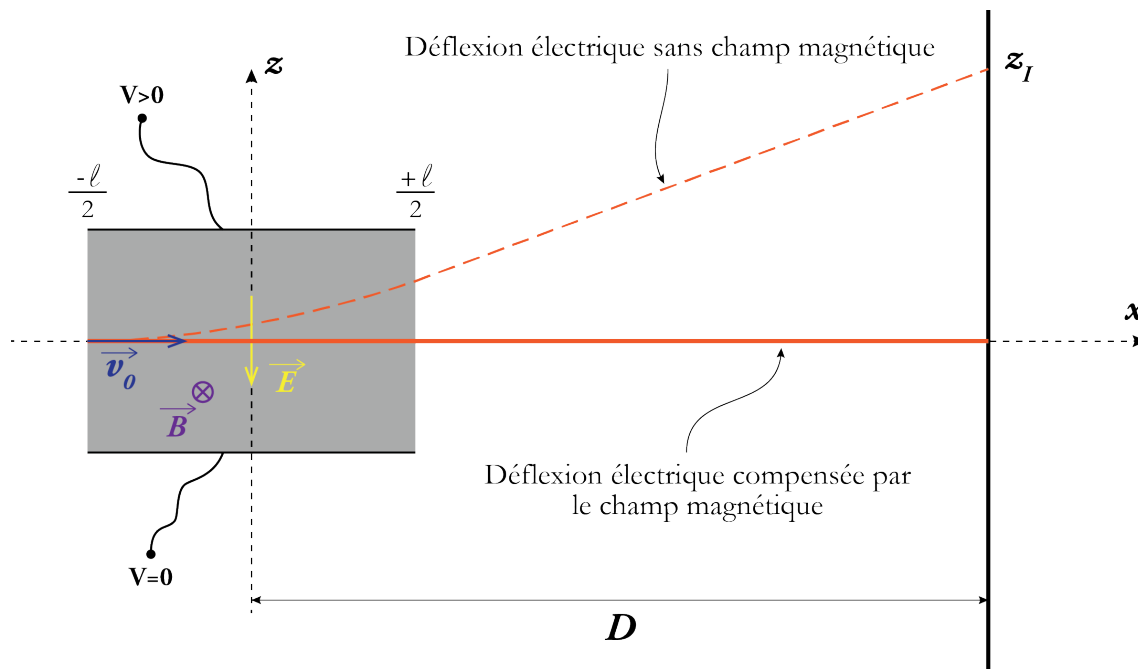
3.2 Expérience de Thomson

À la fin du XIX^{ème} siècle, Joseph Thomson, prix Nobel en 1906 pour « ses recherches théoriques et expérimentales sur la conductivité électrique dans les gaz », réalisa une série d'expériences qui lui permis de mettre en évidence l'existence de l'électron ($q < 0$) et de déterminer le rapport $\frac{e}{m}$.

À partir de l'expérience de déflexion électrique, on ajoute un champ magnétique dans l'espace où règne le champ électrique, la particule subit alors $\vec{F}_{elec}$ et $\vec{F}_{mag}$. Le PFD s'écrit alors :

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On ajuste alors $\vec{B}$ de sorte que les deux forces se compensent.



Déterminer le rapport $\frac{e}{m}$ en fonction de E , B , ℓ , D et z_I la déviation sur l'écran obtenue en présence uniquement d'un champ électrique.

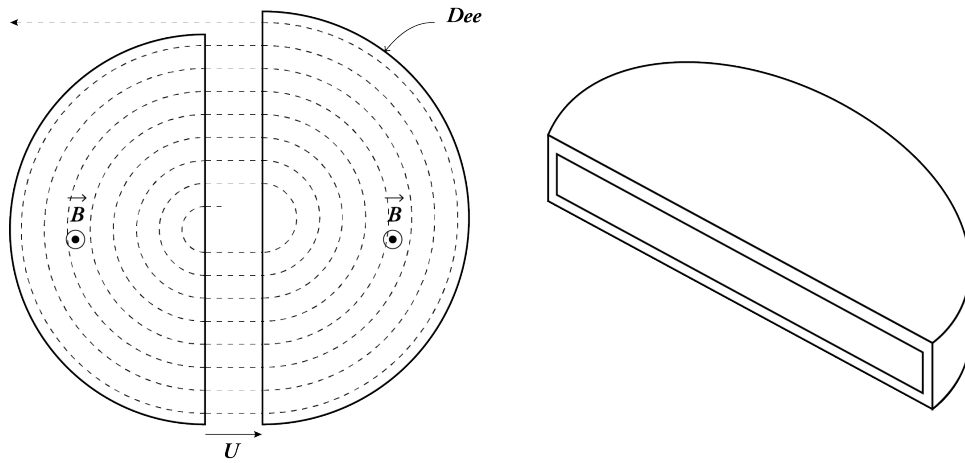
This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

3.3 Le cyclotron

Un champ magnétique indépendant du temps ne peut pas modifier la norme de la vitesse de la particule, par contre il peut « courber » la trajectoire. Cette propriété est utilisée dans les accélérateurs de particules circulaires (cyclotron, synchrotron) et pour dévier des particules (déflexion magnétique).

Le cyclotron est le premier des accélérateurs circulaires, son principe est simple : il consiste à faire repasser la particule un grand nombre de fois dans un même espace où un champ électrique permet de l'accélérer. Il est clair que ce champ ne doit pas être un champ électrostatique (le travail total de la force électrostatique sur une courbe fermée est nul !) mais un champ variable que nous supposons « quasi-stationnaire ».

Le cyclotron est essentiellement formé de deux « boîtes » métalliques semi-cylindriques appelées « dees » entre lesquelles est appliquée une différence de potentiel variable $u(t)$; on crée ainsi un champ électrique variable $E(t)$ entre les deux dees (espace accélérateur). L'ensemble est placé dans un champ magnétique indépendant du temps B sensiblement uniforme qui permet de courber les trajectoires :



Dans les dees, le champ électrique est nul et la particule n'est soumise qu'à la force magnétique, sa trajectoire est donc un arc de cercle de rayon $R = \frac{mv}{qB}$ qui, comme v , augmente à chaque demi-tour. Comme la vitesse angulaire reste constante égale à $\omega_c = \left| \frac{qB}{m} \right|$ la particule est effectivement accélérée à chaque passage entre les dees s'il y a « synchronisme » avec la ddp accélératrice dont la pulsation doit donc être égale à ω_c . Actuellement ces accélérateurs restent utilisés comme accélérateurs d'ions lourds et en médecine nucléaire.

Application numérique : Dans le cyclotron de l'université du Michigan règne un champ magnétique $B = 0,10$ T. Pour un proton de masse $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg et de charge $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C, la fréquence cyclotronique f_c s'écrit :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} = 1,5 \text{ MHz}$$

La vitesse maximale est obtenue pour le rayon maximum $R_{\max} = 1,05$ m :

$$v_{\max} = R_{\max} \omega_c = 1,0 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Complément hors-programme mais qui peut être utile !

Retour sur le mouvement dans un champ magnétique

Dans un référentiel galiléen on étudie une particule de masse m , de charge q , de vitesse initiale $\vec{v}_0$ et placée dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$. Le PFD donne :

$$m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{q}{m} \vec{B} \wedge \vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

avec $\vec{\Omega} = -\frac{q}{m} \vec{B}$, vecteur constant dont la norme est homogène à une pulsation $\|\vec{\Omega}\| = \omega_c$ la pulsation cyclotron. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} + \vec{v}_0} \end{aligned}$$

Or, au chapitre 1, nous avons vu que pour un mouvement circulaire, on pouvait écrire que $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ avec $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation. Décomposons le vecteur vitesse : $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, somme respectivement de la composante parallèle au champ $\vec{B}$ et perpendiculaire à $\vec{B}$. On peut ainsi écrire $\vec{v}_{\parallel} = \left(\vec{v} \cdot \vec{B} \right) \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}$.

$$\text{Or} \quad \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{B}) = \frac{d}{dt} (\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} = \frac{q \vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \cdot \vec{B} = \vec{0}$$

Par conséquent, $\vec{v} \cdot \vec{B}$ est constant. Donc la composante parallèle $\vec{v}_{\parallel}$ de la vitesse est une constante du mouvement. De plus, l'angle θ entre $\vec{B}$ et $\vec{v}$ est donc constant car les modules des deux vecteurs le sont aussi ; $\|\vec{v}_{\perp}\| = v_{\perp}$ est donc aussi une constante. Projétons le PFD sur le plan perpendiculaire au champ magnétique :

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v}_{\perp} \wedge \vec{B} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\perp}$$

- d'un mouvement de translation rectiligne uniforme parallèlement au champ magnétique $\vec{B}$ car $\vec{v}_{\parallel} = \overrightarrow{cste}$.
- d'un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique de rayon $R = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$.

- d'un mouvement de translation rectiligne uniforme parallèlement au champ magnétique $\vec{B}$ car $\vec{v}_{\parallel} = \overrightarrow{cste}$.
- d'un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique de rayon $R = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$.

Cas général : établissement des équations horaires du mouvement

[illegible]

Lined area for writing or drawing, consisting of multiple horizontal lines.