

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.	Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.
Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie. Couple. Liaison pivot. Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses. Définir un couple. Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement.
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté dans un référentiel galiléen. Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

Plan

1 Moment cinétique d'un point matériel

- 1.1 Moment cinétique par rapport à un point
- 1.2 Moment cinétique par rapport à un axe
- 1.3 Application : mouvement circulaire

2 Moment d'une force

- 2.1 Moment d'une force par rapport à un point
- 2.2 Moment d'une force par rapport à un axe
- 2.3 Application : calcul en coordonnées cylindriques
- 2.4 Bras de levier
- 2.5 Cas d'un moment d'une force nul
- 2.6 Notion de couple

3 Théorème du moment cinétique

- 3.1 Énoncé
- 3.2 Cas de conservation du moment cinétique
- 3.3 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe
- 3.4 Application au pendule

4 Solide en rotation : moment cinétique et étude énergétique

- 4.1 Du moment cinétique au moment d'inertie
- 4.2 Loi du moment cinétique pour un solide en rotation
- 4.3 Approche énergétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe
- 4.4 Liaison pivot
- 4.5 Pendule pesant

Vérification des connaissances

	Connaissances
☐	Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté : expression mathématique, unité, expression du moment cinétique par rapport à un axe en utilisant le bras de levier.
☐	Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe : expression mathématique en fonction du moment d'inertie.
☐	Moment d'une force par rapport à un point ou à un axe orienté : expressions mathématiques générales, définition du bras de levier, expression du moment par rapport à un axe en utilisant le bras de levier.
☐	Loi du moment cinétique en un point fixe ou par rapport à un axe orienté fixe dans un référentiel galiléen.
☐	Loi du moment cinétique appliquée au solide en rotation autour d'un axe fixe orienté dans un référentiel galiléen.
☐	Couple : définition, couple moteur, couple de freinage.
☐	Couple de torsion : expression mathématique en fonction de l'angle de torsion, énergie potentielle associée.
☐	Énergie cinétique d'un solide en rotation : expression mathématique, comparaison pour 2 systèmes en rotation de moments d'inertie différents.
☐	Loi de la puissance cinétique pour un solide : énoncé, équivalence avec la loi du moment cinétique (démonstration).

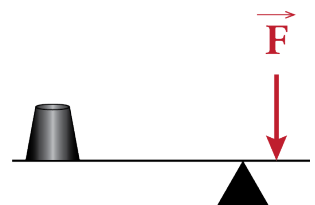
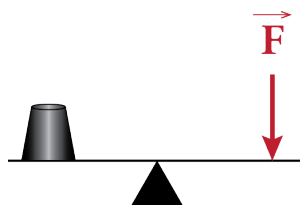
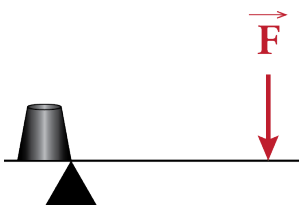
	Capacités
☐	Relier les propriétés du moment cinétique aux caractéristiques du mouvement : direction et sens pour un moment cinétique vectoriel, signe pour un moment cinétique scalaire.
☐	Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
☐	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou d'un solide en rotation en appliquant la loi du moment cinétique.
☐	A partir de l'équation du mouvement d'un solide, établir l'intégrale première du mouvement et interpréter l'équation obtenue d'un point de vue énergétique.
☐	En utilisant le portrait de phase fourni, caractériser le mouvement d'un pendule pesant (ou système analogue) en fonction des conditions initiales.

Introduction

Dans la première partie du cours de mécanique, nous avons étudié deux approches de résolution d'un problème : l'application du principe fondamental de la dynamique (PFD) et l'utilisation d'un théorème énergétique. Pour les systèmes en rotation, la notion de force n'est pas toujours la plus pertinente : il est plus aisé d'utiliser la notion de moment. L'objectif de ce chapitre est donc de définir les concepts de moment cinétique, de moment d'une force et de les relier à l'aide du théorème du moment cinétique.

Prenons quelques exemples introductifs de la vie quotidienne ou questions qui peuvent se rencontrer très souvent :

- Pour fermer une porte, est-il plus facile d'appliquer une force près des gonds ou près de la poignée ?
- Dans quelle situation la force à appliquer pour soulever la masse est-elle la plus faible ?



- Comment expliquer l'équilibre d'un mobile ?



- Lors d'une pirouette, comment fait un patineur pour tourner de plus en plus vite ?
- Et cette démonstration avec une sphère d'Hoberman ?



<https://www.youtube.com/watch?v=64t-dVtDwkQ>

⇒ Les trois premiers exemples montrent que la notion de force n'est pas suffisante pour étudier les systèmes, il est nécessaire de connaître la distance entre le point d'application de la force et le pivot : c'est le « bras de levier ». Dans ces systèmes mécaniques, la notion pertinente est alors le produit : « force $\times$ bras de levier » !

1 Moment cinétique d'un point matériel

1.1 Moment cinétique par rapport à un point

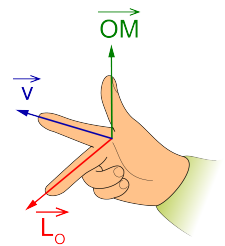
On considère un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. On note $\vec{p} = m\vec{v}$ sa quantité de mouvement. On considère aussi un axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ déterminé par un point O et un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ dont le sens précise l'orientation de l'axe.



Le moment cinétique de M par rapport à un point O est le vecteur défini par :

$$\vec{L}_O = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Sa norme se mesure en $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1} = \text{J}\cdot\text{s}$



Propriétés : Le moment cinétique par rapport à un point est défini à partir d'un **produit vectoriel** : $\vec{L}_O$ est donc perpendiculaire aux vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{v}$. On peut donc en déduire :

- Si le mouvement de M est plan et que O appartient à ce plan, alors $\vec{L}_O$ est perpendiculaire à ce plan à tout instant. Sa direction est donc fixe et perpendiculaire au plan du mouvement. La réciproque est vraie.
- Si le mouvement de M est rectiligne et inscrit sur une droite $\mathcal{D}$ passant par O , $\vec{L}_O$ est nul à tout instant car $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires à tout instant. La réciproque est vraie.

Remarque : Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel on le calcule et l'on indique en indice. On peut donc écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned}\vec{L}_B &= \vec{BM} \wedge \vec{p} = (\vec{BA} + \vec{AM}) \wedge \vec{p} = \vec{BA} \wedge \vec{p} + \vec{AM} \wedge \vec{p} \\ \Rightarrow \vec{L}_B &= \vec{L}_A + \vec{BA} \wedge \vec{p}\end{aligned}$$

1.2 Moment cinétique par rapport à un axe



Le moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ est la projection orthogonale $\vec{L}_O$ sur l'axe Δ :

$$L_\Delta = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

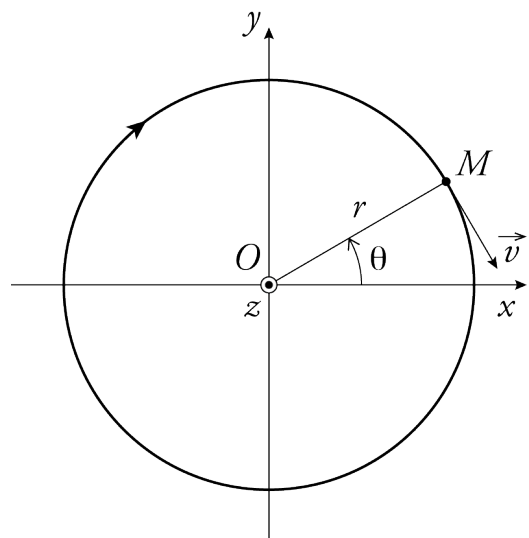
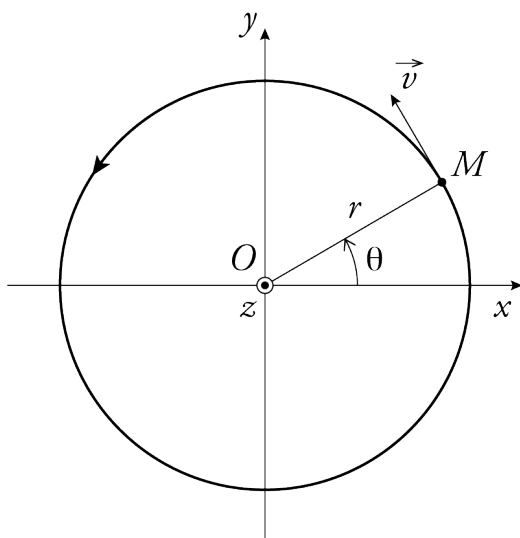
Remarque : Le moment cinétique par rapport à un axe Δ ne dépend pas du choix du point O appartenant à cet axe mais seulement de sa direction et de son orientation.

⇒ Démonstration :

1.3 Application : mouvement circulaire

Déterminer l'expression du moment cinétique par rapport à O et par rapport à (Oz) d'un point M en mouvement circulaire de centre O et de rayon R . L'axe (Oz) étant l'axe perpendiculaire au plan du cercle passant par O .

On peut donc résumer ces propriétés avec les graphes suivants (placer $\vec{L}_O$) :



2 Moment d'une force

On considère maintenant une force $\vec{f}$ qui s'applique en un point M .

2.1 Moment d'une force par rapport à un point



Le moment en O de la force $\vec{f}$ s'appliquant en M est le vecteur défini par le produit vectoriel :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \dots\dots\dots$$

Sa norme se mesure en joule : $1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Remarque : le moment des forces par rapport à un point est une grandeur additive :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_1) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_2)$$

2.2 Moment d'une force par rapport à un axe



Le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ est la projection orthogonale de $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f})$ sur Δ :

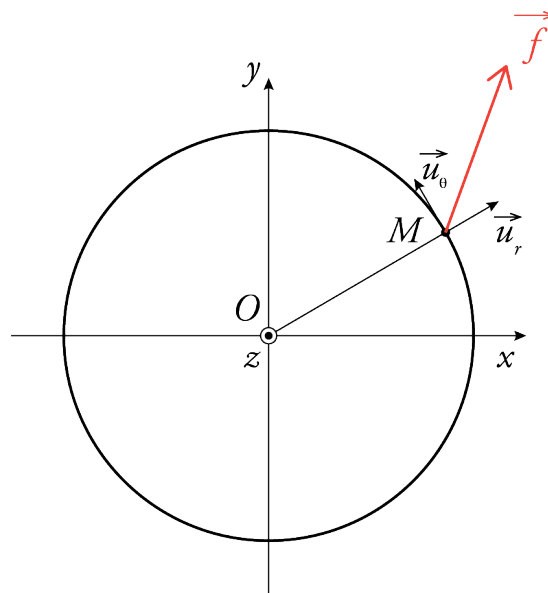
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Remarque : Comme précédemment, c'est une grandeur additive. Et comme pour le moment cinétique par rapport à un axe, le choix du point O n'a pas d'influence sur le calcul.

2.3 Application : calcul en coordonnées cylindriques

On fait coïncider l'axe Δ avec l'axe (Oz) et repérons la position du point M à l'aide de ses coordonnées cylindriques $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$.

Calculer le moment d'une force $\vec{f}$ par rapport à O , puis par rapport à (Oz) .



On appelle **droite d'action d'une force** $\vec{f}$ appliquée en M la droite $(M, \vec{f})$ passant par M et dirigée par le vecteur $\vec{f}$.

Alors d est la distance séparant la **droite d'action** de la force $\vec{f}$ de l'axe (Oz) . Cette distance d est appelée le « **bras de levier** » de la force $\vec{f}$. On peut alors écrire :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = fd$$

Le signe de $\mathcal{M}_{(Oz)}$ est :

- positif lorsque $\alpha \in]0, \pi[$. C'est le cas lorsque $\vec{f}$ tend à faire bouger M vers les θ croissants
- négatif lorsque $\alpha \in]-\pi, 0[$. C'est le cas lorsque $\vec{f}$ tend à faire bouger M vers les θ décroissants

2.4 Bras de levier



On appelle **bras de levier** la distance séparant l'axe Δ de la droite d'action $(M, \vec{f})$ de la force $\vec{f}$. La valeur absolue $|\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})|$ du moment de $\vec{f}$ par rapport à Δ est égale au produit de la norme de la force par le bras de levier :

$$|\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})| = \text{norme de la force} \times \text{bras de levier}$$

Pour déterminer son signe, on peut rechercher le sens du projeté de $\vec{OM} \wedge \vec{f}$ sur la droite orientée Δ ou bien regarder le sens dans lequel la force $\vec{f}$ tend à faire tourner M autour de Δ :

- si ce sens est direct, alors $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) > 0$
- si ce sens est indirect, alors $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) < 0$

2.5 Cas d'un moment d'une force nul

Comment interpréter que le moment $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})$ d'une force $\vec{f}$ par rapport à la droite orientée Δ soit nul ? Deux possibilités :

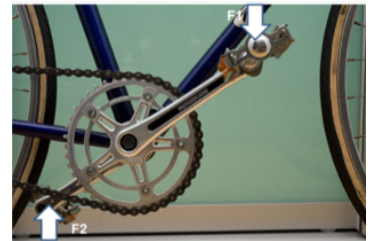
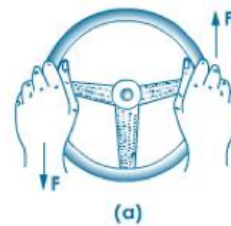
-
-
-

2.6 Notion de couple



Un couple de forces est un ensemble de deux forces de même grandeur, de droites d'action parallèles et de sens opposés. Un couple (ou couple de forces) est donc un ensemble de forces de résultante nulle mais de moment par rapport à un axe non nul.

Rotating forces : couples



3 Théorème du moment cinétique

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}$. Le point M est soumis à un ensemble de forces $\vec{f}_i$. On note O un point fixe et Δ une droite orientée fixe contenant O . On choisit l'axe (Oz) de telle sorte qu'il coïncide avec l'axe Δ .

3.1 Énoncé



La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à O est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport au même point O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i)$$

Démonstration :

3.2 Cas de conservation du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique est particulièrement utile lorsque la somme des moments des forces par rapport à O s'annule. Le moment cinétique $\vec{L}_O$ est donc une constante du mouvement. En pratique cela correspond à deux cas :

- $\sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$ à tout instant : M est alors isolé ou pseudo-isolé. Il est en mouvement rectiligne et uniforme ou immobile.
- $\sum_i \vec{f}_i \parallel \vec{OM}$ à tout instant : la droite d'action de la résultante des forces passe constamment par O . M est alors soumis à une **force centrale** de centre O . Ce sera l'objet de notre prochain chapitre.

3.3 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

 La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport ce même axe :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

La démonstration est facile en reprenant la précédente et en remarquant que :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \frac{d(\vec{L}_O \cdot \vec{u}_z)}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_z$$

3.4 Application au pendule

Déterminer l'équation du mouvement du pendule en appliquant le TMC.

4 Solide en rotation : moment cinétique et étude énergétique

On a montré que l'étude des mouvements d'un solide en translation s'effectuait à l'aide du principe fondamental de la dynamique comme pour la mécanique du point. Le mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe se fait ici à l'aide du moment cinétique par rapport à cet axe.

4.1 Du moment cinétique au moment d'inertie

Pour établir la loi du moment cinétique pour un solide, nous allons utiliser une méthode très souvent utilisée en le considérant comme une somme d'une multitude de points matériels.

4.1.1 Moment d'inertie d'un point matériel

Considérons un point matériel M en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Δ est un axe orienté fixe de ce référentiel coïncidant avec l'axe (Oz) du repère. On repère M à l'aide de ses coordonnées cylindriques. Établissons le moment cinétique $L_{(Oz)}$ de M par rapport à Δ tel que $L_{(Oz)} = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z$, c'est-à-dire la composante selon $\vec{u}_z$ du moment cinétique par rapport à O :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= m \vec{OM} \wedge \vec{v} = \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ \Rightarrow L_{(Oz)} &= \dots\dots\dots\end{aligned}$$

 En coordonnées cylindriques d'axe (Oz) , on définit le moment d'inertie $J_{(Oz)}(M)$ d'un point M de coordonnées (r, θ, z) par rapport à l'axe (Oz) tel que

$$J_{(Oz)}(M) = \dots\dots\dots$$

Le moment cinétique de M par rapport à cet axe (Oz) est alors

$$L_{(Oz)}(M) = J_{(Oz)}(M)\dot{\theta}$$

4.1.2 Moment d'inertie d'un système déformable

Considérons un système constitué de plusieurs points matériels M_i de masse m_i et de moments cinétiques par rapport à l'axe orienté Δ : $L_{\Delta}(M_i)$. Le moment cinétique du système de points est obtenu par sommation des moments cinétiques individuels :

$$L_{\Delta} = \sum_i L_{\Delta}(M_i)$$

Remarque : Attention : les moments cinétiques par rapport à Δ sont algébriques, il faut faire très attention aux signes !

Dans le cas des coordonnées cylindriques où Δ est confondu avec l'axe (Oz) , on peut donc écrire :

$$L_{(Oz)} = \sum_i L_{(Oz)}(M_i) = \sum_i J_{(Oz)}(M_i)\dot{\theta}_i$$

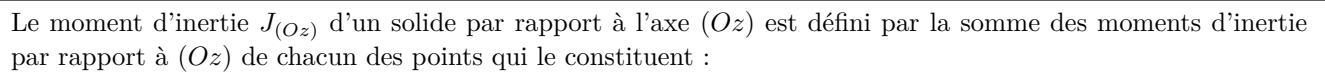
où $J_{(Oz)}(M_i) = m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du point M_i par rapport à (Oz) et $\dot{\theta}_i$ sa vitesse angulaire.

4.1.3 Moment d'inertie d'un solide en rotation par rapport à un axe

On étudie un solide en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour d'un axe orienté fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$. L'axe (Oz) du repère coïncide avec cet axe de rotation. Le solide est assimilé à un ensemble de points matériels de masse m_i repérés en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) .

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre (partie sur la cinématique du solide), tous les points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe possèdent la même vitesse angulaire. Par rapport à l'expression précédente, on peut donc écrire :

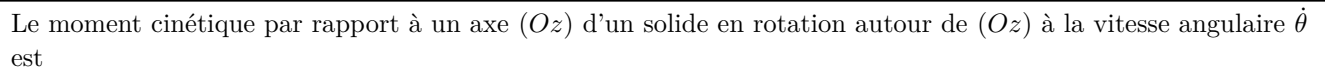
$$L_{(Oz)} = \left(\sum_i J_{(Oz)}(M_i) \right) \dot{\theta} = J_{(Oz)} \dot{\theta}$$



$$J_{(Oz)} = \sum_i J_{(Oz)}(M_i)$$

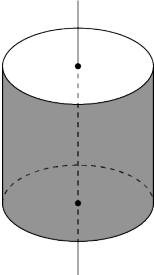
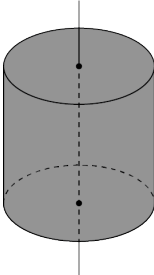
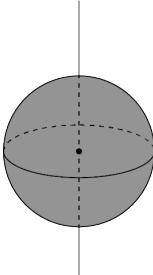
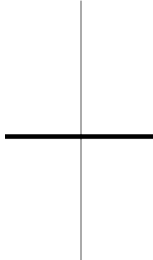
Remarque : On peut aussi modéliser un solide par une répartition continue de masse. La somme discrète devient donc une intégrale sur le volume V du solide :

$$J_{(Oz)} = \iiint_V \rho(M) r^2 d\tau_M$$



$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)} \dot{\theta}$$

Moments d'inertie de quelques solides : Le tableau ci-dessous donne le moment d'inertie de quelques solides homogènes de masse m par rapport à l'axe (Oz) dessiné sur les figures.

Cylindre vide de rayon R	Cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	Barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
			

Remarque : Plus une masse m est éloignée de l'axe de rotation (Oz), plus sa contribution au moment d'inertie par rapport à cet axe est importante. Cela explique pourquoi le moment d'inertie d'un cylindre plein est inférieur à celui d'un cylindre creux de même masse : une grande partie de la masse est située à faible distance de l'axe et contribue donc peu à son moment d'inertie.

[illegible]

4.2 Loi du moment cinétique pour un solide en rotation

4.2.1 Loi scalaire du moment cinétique pour un solide

Considérons un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe (Oz) dans un référentiel $\mathcal{R}$. On note $J_{(Oz)}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) . On caractérise son mouvement par sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Son moment cinétique est donc $L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta}$. Le solide est soumis à des forces extérieures $\vec{f}_i$ de moments par rapport à ce même axe $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$

On rappelle que si la force $\vec{f}$ s'applique en un point A alors son moment par rapport à (Oz) s'écrit :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i) \cdot \vec{u}_z = (\vec{OA} \wedge \vec{f}_i) \cdot \vec{u}_z$$



La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport ce même axe :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

Pour un solide, $L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta}$ on peut donc en déduire :

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

Remarque : Le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe (Oz) est sa caractéristique intrinsèque qui mesure son aptitude à s'opposer aux variations de sa vitesse de rotation autour de cet axe.

4.2.2 Conservation du moment cinétique



Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe se conserve lorsque la somme des moments des forces extérieures est nulle.

⇒ Dans ce cas, puisque le moment d'inertie est une constante, la vitesse de rotation du solide est aussi une constante.



Un solide est à l'équilibre lorsque sa vitesse angulaire est nulle à tout instant : $\dot{\theta} = 0 \forall t$, alors la somme des moments des forces extérieures est nulle.

4.2.3 Couples



Deux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$, de norme f et opposées s'appliquant en A_1 et en A_2 forment un couple de forces lorsque leur résultante est nulle $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$ et pour lesquelles le moment total Γ du couple n'est pas nul et vaut :

$$\Gamma = \mathcal{M}_{(Oz)} = fd$$

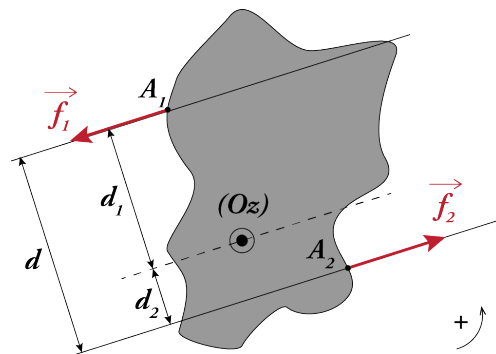
où d est la distance entre les droites d'action parallèles de ces deux forces.

Dans l'exemple ci-contre, on peut déterminer le moment des forces par rapport à (Oz) à l'aide du produit de la force par le bras de levier :

$$|\mathcal{M}_{(Oz)}| = fd_1 + fd_2 = fd$$

Par abus de langage, on désigne simplement par « couple », le moment du couple par rapport à (Oz) et on le note Γ . Il ne dépend pas de la position de l'axe de rotation ! On trouve son signe en cherchant le sens dans lequel il tend à faire tourner le système autour de l'axe orienté : si c'est dans le sens direct, $\Gamma > 0$ sinon il est négatif. Dans l'exemple de la figure, $\Gamma = +fd$.

Remarque : Cette notion de couple se généralise à un ensemble de forces dont la résultante est nulle et dont le moment des forces par rapport à un axe (Oz) est non nul.



4.2.4 Couple de torsion (HP)

Étudions un fil cylindrique métallique d'axe (Oz) dont une des sections est fixe. A l'autre extrémité, on attache une barre AB . On applique un couple de forces $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$ de norme f aux extrémités de cette barre pour « tordre » le fil. Le moment par rapport à (Oz) de ce couple vaut $\Gamma_1 = fAB$. Le fil se tord donc d'un angle α , appelé **angle de torsion**. A l'équilibre, la somme des moments est nulle : le fil exerce donc sur la barre un **couple de torsion** $\Gamma = -\Gamma_1$.



Dans le domaine d'élasticité du métal, le moment Γ du couple de torsion exercé par un fil métallique est proportionnel à l'angle de torsion α et vaut

$$\Gamma = -C\alpha$$

où C est appelée **constante de torsion** du fil.

Remarque : La constante de torsion d'un fil métallique dépend du diamètre du fil, de sa longueur et de l'élasticité du matériau. Comme ce couple tend à ramener le système vers sa position de torsion nulle, on parle aussi de couple de rappel.

4.2.5 Couple moteur et couple de freinage

On étudie un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe (Oz) auquel on applique un couple de moment Γ par rapport à (Oz) . La loi du moment cinétique par rapport à cet axe s'écrit :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \dots\dots\dots = \dots\dots$$

Faisons l'hypothèse que le solide tourne dans le sens direct autour de (Oz) . On a donc $\dot{\theta} > 0$. En fonction du signe de Γ , deux situations sont possibles :

- si $\Gamma > 0$, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ augmente, la rotation du solide est accélérée, le couple est alors un
..... Γ et $\dot{\theta}$ sont de
- si $\Gamma < 0$, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ diminue, la rotation du solide est freinée, le couple est alors un
..... Γ et $\dot{\theta}$ sont de

4.3 Approche énergétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On considère comme dans les paragraphes précédents, un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe noté (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

4.3.1 Énergie cinétique d'un solide en rotation

Nous avons déjà modélisé le solide comme un ensemble de points matériels M_i de masse m_i . On a vu aussi dans la première partie que tous les points d'un solide (indéformable) sont en mouvement circulaire de rayon r_i à la vitesse angulaire commune $\dot{\theta}$. Leur vitesse s'écrit donc $\vec{v}_i = r_i \dot{\theta} \vec{u}_{\theta_i}$. L'énergie cinétique de chaque point M_i s'écrit : $E_c(M_i) = \frac{1}{2} m_i v_i^2$. L'énergie cinétique du solide s'obtient alors en sommant toutes les énergies cinétiques de chacun des points :

$$E_c = \sum_i E_c(M_i) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

On reconnaît alors l'expression du moment d'inertie du solide par rapport à (Oz) puisque $J_{(Oz)} = \sum_i m_i r_i^2$.

Un solide de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ en rotation autour d'un axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ possède l'énergie cinétique :

$$E_c = \dots\dots\dots$$

4.3.2 Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation

Étudions une force $\vec{f}_i$ s'appliquant sur un point M_i du solide en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. D'après le chapitre sur l'approche énergétique de la mécanique, nous savons que pour un point matériel, la puissance d'une force est définie par

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Or dans le paragraphe sur le moment cinétique (§ 2.3), nous avons montré que

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = \dots\dots\dots$$

On peut donc en déduire :

La puissance de la force $\vec{f}_i$ appliquée en un point M_i d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz) s'exprime par :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \dots\dots\dots$$

4.3.3 Loi de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures $\vec{f}_i$ qu'on lui applique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$$

Démonstration :

Remarque : Pour étudier un solide en rotation autour d'un axe fixe, les lois de l'énergie cinétique et du moment cinétique sont équivalentes. Les deux donnent les mêmes équations pour **un solide indéformable**.

4.4 Liaison pivot

Un dispositif rotatif est constitué d'un solide indéformable appelé **rotor** en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un second solide immobile appelé **stator**.



Une liaison pivot d'axe (Oz) restreint les possibilités de mouvement du rotor à une rotation d'axe (Oz) par rapport au stator.

Dans la plupart des situations étudiées ici, on supposera que la liaison est géométriquement idéale : la liaison sert à assurer un guidage de la rotation autour de l'axe (Oz) . Aucune translation n'est possible le long de ce même axe.

La façon la plus simple de réaliser une liaison pivot est d'emboîter deux cylindres de même axe tout en empêchant la translation des cylindres le long de leur axe à l'aide de butées. Lorsque l'on peut négliger les frottements entre les deux cylindres (rotor et stator), les forces de frottements sont alors normales aux surfaces de contact et coupent donc l'axe de rotation (Oz) , leur moment est donc nul.

L'action d'une liaison pivot **idéale** d'axe (Oz) a un moment par rapport à cet axe égal à 0.

Remarque : Seul le moment d'axe (Oz) de la liaison est nul ! Les autres ne le sont pas puisqu'ils réalisent le guidage en rotation du système.

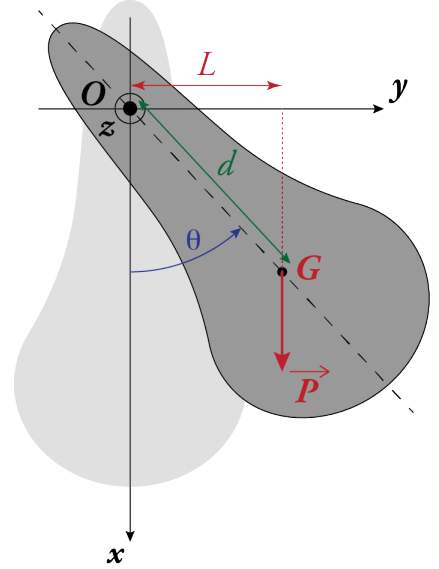
4.5 Pendule pesant

4.5.1 Description du système et équation du mouvement

Un pendule pesant est un solide de masse m de forme quelconque, mobile dans le champ de pesanteur terrestre autour d'un axe horizontal fixe **ne passant pas** par son centre de gravité G . On notera (Oz) l'axe de rotation du solide et $J_{(Oz)}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) . On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox) . On suppose enfin que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz) . Le solide est soumis à

- l'action exercée par la liaison pivot. En supposant cette liaison comme idéale, le moment par rapport à l'axe (Oz) est donc nul.
- son poids vertical descendant s'appliquant au centre de gravité G .

Déterminer l'équation du mouvement du pendule pesant.



4.5.2 Oscillations de faible amplitude

Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, résoudre l'équation différentielle précédente. Exprimer la pulsation ω_0 du mouvement harmonique.

Remarque : Expérimentalement, la mesure de la période du mouvement dans le cas des petites oscillations permet de déterminer la valeur de $J_{(Oz)}$ connaissant la position du centre de gravité, la masse du solide et g l'accélération de la pesanteur.

4.5.3 Étude énergétique du mouvement

Déterminer l'intégrale première du mouvement. Interpréter physiquement chaque terme.

On obtient une équation qui ne dépend que d'une seule variable : ici la variable angulaire θ . On peut donc utiliser la même méthodologie utilisée pour étudier un mouvement dans un puits de potentiel. On définit E_0 l'énergie potentielle minimum

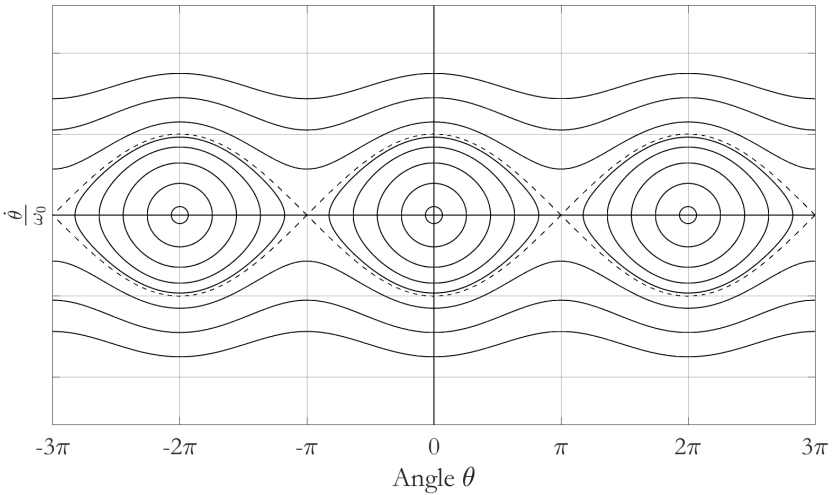
$E_0 = \dots\dots\dots$ et $E_1 = -E_0$, l'énergie potentielle maximale. On distingue alors les trois cas suivants :

4.5.4 Portrait de phase

A partir de l'intégrale première du mouvement, on peut exprimer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de l'angle θ pour pouvoir tracer le portrait de phase du système :

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = \pm \sqrt{2 \left(\frac{E_m}{mgd} + \cos \theta \right)}$$

On trace numériquement la courbe $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ pour différentes valeurs de E_m pour obtenir le portrait de phase du système.



On retrouve les cas définis précédemment :

- si $E_0 < E_m < E_1$, le mouvement est périodique, la trajectoire dans le diagramme de phase est fermée. Si l'amplitude est faible la trajectoire de phase est circulaire, les oscillations sont harmoniques, la période est indépendante de l'amplitude du mouvement, on parle d'isochronisme des oscillations. Si l'amplitude augmente, il y a perte de l'isochronisme des oscillations : la période dépend de l'amplitude des oscillations, la trajectoire de phase est elliptique.
- Si $E_m > E_1$, le mouvement est révolitif, le pendule réalise une succession de tours complets, toujours décrits dans le même sens.

A la limite, lorsque $E_m = E_1 = mgd$, on retrouve la séparatrice, les positions d'équilibre telles que $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et les points d'équilibre instables telles que $\theta = (2k + 1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.