

Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Mécanique - Chap 6

MPSI 2

Aux Lazaristes

2025-2026

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Point matériel soumis à un champ de force centrale.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif. Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer la conservation de l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.
Cas particulier du champ newtonien. Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
Satellites terrestres : géostationnaires, de localisation et de navigation, météorologique.	Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

Plan

1 Force centrale conservative

- 1.1 Définition
- 1.2 Exemples

2.5 Caractère conservatif de la force

2 Étude générale d'une force centrale conservative

- 2.1 Conservation du moment cinétique
- 2.2 Planéité du mouvement
- 2.3 Système de coordonnées
- 2.4 Loi des aires. Deuxième loi de Kepler.

3 Application à l'attraction gravitationnelle

- 3.1 Système d'équations du mouvement
- 3.2 Étude du mouvement radial
- 3.3 Étude de la trajectoire circulaire
- 3.4 Vitesses cosmiques
- 3.5 Application aux satellites géostationnaires

Vérification des connaissances

	Connaissances
☐	Force centrale : définition.
☐	Aire balayée par un point ayant une trajectoire elliptique par unité de temps : expression mathématique (à savoir retrouver), illustration par un schéma.
☐	Énergie potentielle effective : graphique en fonction de la distance radiale pour une interaction attractive ou répulsive.
☐	Lois de Kepler : énoncé pour les planètes, transposition aux satellites.
☐	Expression mathématique de la force d'attraction gravitationnelle et de la force coulombienne.
☐	Satellite géostationnaire : définition, application, trajectoire, localisation (plan et altitude).
☐	Énergie mécanique : expression mathématique dans le cas d'un mouvement circulaire ou elliptique.
☐	Vitesses cosmiques : définitions, ordre de grandeur des vitesses cosmiques terrestres.

	Capacités
☐	Utiliser la loi du moment cinétique pour montrer la conservation du moment cinétique et les propriétés qui en découlent : mouvement plan ; loi des aires.
☐	Déterminer l'expression mathématique d'une énergie potentielle effective à partir de la conservation de l'énergie mécanique.
☐	Utiliser le graphique d'énergie potentielle effective pour déterminer la forme de la trajectoire et en déduire si un état est lié ou de diffusion.
☐	Dans le cas d'un satellite (ou planète) ayant une trajectoire circulaire, démontrer que le mouvement est nécessairement uniforme et calculer sa période.
☐	Déterminer l'expression mathématique de l'énergie mécanique dans le cas d'un mouvement circulaire ou elliptique.
☐	Démontrer la 3 ^{ème} loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire.
☐	Calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire.
☐	Traduire mathématiquement les définitions des vitesses cosmiques pour déterminer leurs expressions littérales.

Introduction

Comme nous l'avons évoqué à la fin du chapitre précédent, les forces centrales jouent un rôle crucial dans de nombreuses situations que nous étudierons au cours de ce chapitre. Parmi ces forces centrales, nous nous attarderons sur les forces newtoniennes et tout particulièrement sur l'attraction gravitationnelle.

1 Force centrale conservative

1.1 Définition

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. O est un point fixe de ce référentiel (origine). On note $\overrightarrow{OM}$ son vecteur position, $\vec{v}$ sa vitesse, $\vec{p} = m\vec{v}$ sa quantité de mouvement, $\vec{a}$ son accélération et $\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ son moment cinétique en O .



Une force centrale de centre O est

Conséquence : Si $\vec{f}$ est une force centrale alors elle est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$ et les coordonnées adaptées sont donc les coordonnées **sphériques** d'origine O . On va donc poser : $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$. Avec ces notations, on peut donc écrire :

$$\vec{f} = f_r \vec{u}_r$$

Les composantes de la force f_θ selon $\vec{u}_\theta$ et f_φ selon $\vec{u}_\varphi$ sont nulles.



Une force est conservative si, on peut donc l'écrire sous la forme :

$$\vec{f} = \dots\dots\dots$$

Conséquence : Avec les notations en coordonnées sphériques, on peut alors écrire pour une force centrale conservative :

Une force centrale conservative s'écrit donc

$$\vec{f} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

1.2 Exemples

1.2.1 Force d'interaction gravitationnelle

On considère un point matériel O fixe de masse m_1 et M un second point matériel de masse m_2 . On rappelle que la force d'attraction gravitationnelle exercée par O sur M est donnée par la relation :

$$\vec{f} = \dots\dots\dots$$

avec $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$. Cette force est portée par la droite (OM) , il s'agit donc bien d'une force centrale de centre O . Elle est également conservative puisqu'elle dérive de l'énergie potentielle (vue dans le chapitre sur l'approche énergétique) et en posant l'énergie potentielle nulle à l'infini :

$$E_p = \dots\dots\dots$$

1.2.2 Force d'interaction coulombienne

Soit un point O un point matériel fixe de charge q_1 et M un second point de charge q_2 . La force coulombienne exercée par la charge placée en O sur celle en M s'écrit :

$$\vec{f} = \dots\dots\dots$$

Elle est aussi portée par la droite (OM) . C'est donc à nouveau une force centrale de centre O . Elle est conservative puisqu'elle dérive de l'énergie potentielle (avec $E_p = 0$ à l'infini) :

$$E_p = \dots\dots\dots$$

Remarque importante : Le module des forces gravitationnelle et coulombienne est proportionnel à l'inverse du carré de la distance. On parle de force en $\frac{1}{r^2}$. Ce sont des forces dites **newtoniennes**. Elles prennent toutes la même forme en coordonnées sphériques :

$$\vec{f} = \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad E_p(r) = \dots\dots\dots$$

La trajectoire d'un système soumis à une force newtonienne est nécessairement une conique (*cf.* complément)

1.2.3 Force de rappel élastique

On considère toujours un point O fixe, et M un point matériel mobile lié à O par une force de rappel élastique :

$$\vec{f} = -k(r - r_0)\vec{u}_r$$

Une fois encore, la force est portée par la droite (OM) . Elle est donc centrale de centre O . Elle est également conservative puisqu'elle dérive de l'énergie potentielle (en choisissant $E_p = 0$ lorsque $r = r_0$) :

$$E_p = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

2 Étude générale d'une force centrale conservative

Le fait qu'un système soit soumis à une force centrale conservative va impliquer de nombreuses conséquences sur son mouvement. On va donc utiliser l'ensemble des outils vus en mécanique.

2.1 Conservation du moment cinétique



Propriété : Le moment cinétique par rapport au centre de force O d'un point M soumis à une force conservative est

$$\vec{L}_O = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

C'est donc une intégrale première du mouvement.

Remarque : Puisque $\vec{L}_O = \text{csté}$, on peut le déterminer à n'importe quel instant, donc on le calculera à l'instant où on connaît position et vitesse, donc très souvent à l'aide des conditions initiales.

2.2 Planéité du mouvement

La conservation du moment cinétique implique que le mouvement est

Démonstration :

-
.....
.....
.....
.....
-
.....
.....
-
.....
.....
.....

2.3 Système de coordonnées

Nous venons de montrer que le mouvement s'effectue dans le plan perpendiculaire au moment cinétique $\vec{L}_O$ passant par O . Les coordonnées adaptées à l'étude de ce problème sont donc les coordonnées polaires de centre O , également centre de la force $\vec{f}$. Dans ce système de coordonnées, on peut donc écrire :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On en déduit donc facilement que :

$$\vec{L}_O = \dots\dots\dots$$

Remarque : Très souvent on choisira d'orienter l'axe (Oz) dans le même sens que le moment cinétique; les coordonnées cylindriques sont donc tout à fait naturelles. Cette orientation implique donc que $\dot{\theta} > 0$, donc que θ est croissant. Le mouvement se fera donc dans le sens direct autour de (Oz) .

2.4 Loi des aires. Deuxième loi de Képler.

Puisque la masse m du système et le moment cinétique sont des constantes, la quantité $r^2\dot{\theta}$ est donc aussi une constante.



On définit la constante des aires $\mathcal{C}$ par

$$\mathcal{C} = r^2\dot{\theta} = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m}$$

Cette constante s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Alors que de manière générale r et θ dépendent du temps, $r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement. Essayons d'interpréter graphiquement cette grandeur...

Entre t et $t + dt$, le point M s'est déplacé le long de sa trajectoire entre les points $M(t)$ et $M(t + dt)$.

L'aire $d\mathcal{A}$ balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant dt (grisée sur la figure) correspond à l'aire du triangle $OM(t)M(t+dt)$. Au premier ordre (puisque $d\theta$ est petit), la hauteur h du triangle est telle que $h = r \tan(d\theta) \simeq r d\theta$. On peut alors écrire que

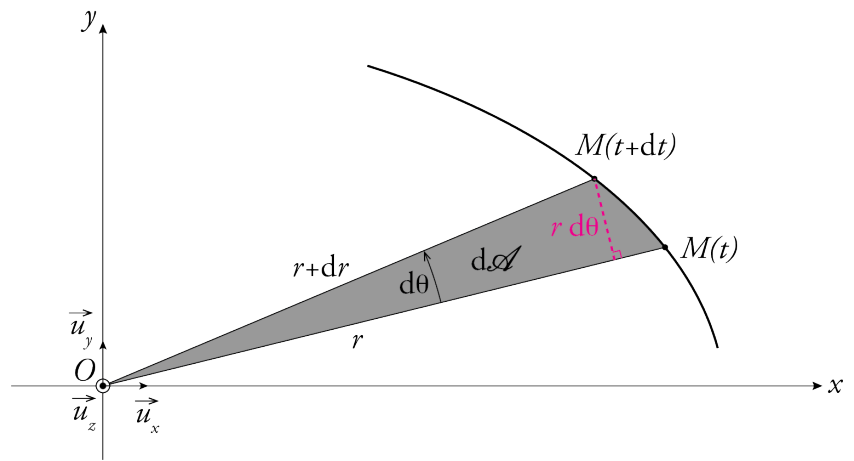
$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM}\| h \Rightarrow d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Or $d\theta = \dot{\theta} dt$, donc l'aire balayée en dt vaut donc :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \mathcal{C} dt$$

La grandeur $V = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\mathcal{C}}{2}$ est donc une constante

et est appelée



Rq : Utiliser la propriété du produit vectoriel :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}\|$$

 La conservation du moment cinétique implique la loi des aires : les aires balayées par le rayon vecteur pendant des intervalles de temps égaux de durée Δt sont égales et valent :

$$\Delta \mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}}{2} \Delta t$$

Conséquence : pour un mouvement non rectiligne, et puisque $r^2 \dot{\theta}$ est une constante :

- plus le mobile M s'approche de O (r de plus en plus faible), plus sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$
- plus le mobile M s'éloigne de O (r augmente), plus sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$

2.5 Caractère conservatif de la force

2.5.1 Conservation de l'énergie mécanique

$\vec{f}$ est une force conservative, elle dérive donc d'une énergie potentielle. Puisqu'il s'agit de la seule force agissant sur le système, l'énergie mécanique se conserve. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique au système M de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d(E_c + E_p)}{dt} = 0$$

L'énergie mécanique du système

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + E_p$$

est conservée au cours du mouvement. C'est une intégrale première du mouvement.

Remarque : On déterminera la valeur de l'énergie mécanique en fonction des conditions initiales.

2.5.2 Énergie potentielle effective

On a montré que le mouvement est plan et que les coordonnées polaires (cylindriques) sont les plus adaptées. Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous avons aussi vu que l'énergie potentielle ne dépend que de r . On peut donc écrire :

$$E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r)$$

Avec la constante des aires, nous disposons donc d'un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \mathcal{C} &= r^2 \dot{\theta} \\ E_m &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r) \end{cases}$$

Le système d'équations est donc fermé : le problème étant à deux degrés de liberté r et θ , la connaissance de ces deux équations permet de résoudre complètement le problème à condition évidemment de connaître la fonction $E_p(r)$.

Sans résoudre le système entièrement, on peut réaliser une étude du mouvement radial. Éliminer la variable θ de l'équation énergétique pour mettre en évidence une énergie potentielle effective...

$E_{p_{\text{eff}}}$ est donc la somme de l'énergie potentielle et de la partie de l'énergie cinétique correspondant au mouvement orthoradial.

Le mouvement radial s'apparente à un mouvement conservatif à un seul degré de liberté dans une **énergie potentielle effective** :

$$E_{p_{\text{eff}}}(r) = \dots\dots\dots$$

Remarque : On a déjà étudié ce genre d'équation dans le chapitre sur l'approche énergétique du mouvement. On utilisera donc la même méthode : point d'équilibre, stabilité, états liés, états de diffusion, etc.

3 Application à l'attraction gravitationnelle

Les généralités développées dans les paragraphes précédents restent valables ici. L'objectif est ici de développer l'expression de l'énergie potentielle de gravitation pour analyser le mouvement radial du système.

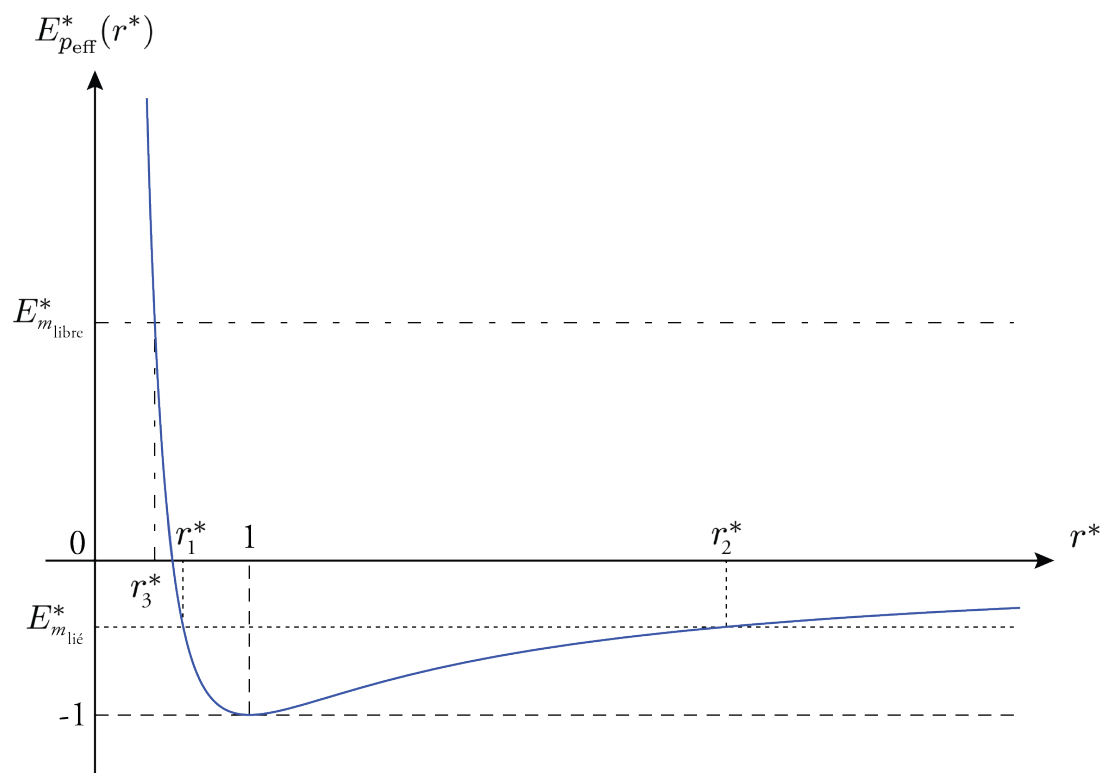
3.1 Système d'équations du mouvement

En vous aidant de ce qui précède déterminer le système d'équations du mouvement d'un point M de masse m en interaction gravitationnelle avec un astre de masse M_A situé en O . On supposera que $M_A \gg m$ de sorte que l'action de m sur M_A ne puisse pas mettre en mouvement M_A .

3.2 Étude du mouvement radial

Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective. Étudier la fonction en mettant en évidence une distance r_0 particulière où l'énergie est minimale et vaut E_{min} . En posant $E_0 = -E_{\text{min}}$ adimensionner l'expression de $E_{p_{\text{eff}}}$.

La courbe représentative de cette fonction est donnée ci-dessous :



On reprend la même méthodologie que dans le chapitre sur les aspects énergétiques de la dynamique du point. Il existe donc 4 possibilités fonction de la valeur de E_m (donc des conditions initiales) :

- si $E_m < E_{\min}$, le mouvement est impossible.
- si $E_m = E_{\min}$, le mouvement est réalisé à $r = r_0$ fixé. La trajectoire est donc un cercle. Et nous avons aussi $\mathcal{C} = r_0^2 \dot{\theta}$ donc $\dot{\theta} = \frac{\mathcal{C}}{r_0^2} = \text{constante}$. Le mouvement est donc circulaire et uniforme.
- si $E_{\min} < E_m < 0$, l'ensemble des distances comprises entre $r_1 = r_1^* r_0$ et $r_2 = r_2^* r_0$ sont accessibles, r_1^* et r_2^* étant définis sur le graphique. On dit que le système est dans un **état lié** : il reste dans le puits de potentiel créé par l'astre attracteur A . La trajectoire est fermée, le point M orbite autour de A . Lorsque $r = r_1$, la distance entre le point M et A est minimale, on dit alors que M est au **périastre**. A l'inverse lorsque $r = r_2$, la distance entre le point M et A est maximale, on dit alors que M est à l'**apoastre**.
- si $E_m \geq 0$, l'ensemble des r accessibles est un intervalle non borné de la forme $[r_3, +\infty[$ avec $r_3 = r_3^* r_0$. Le système est dans un **état de diffusion**. Il peut sortir du puits de potentiel créé par l'astre A . C'est par exemple le cas de certains comètes qui ne passent qu'une seule fois aux alentours du Soleil. On montre que si $E_m = 0$ la trajectoire est parabolique et hyperbolique si $E_m > 0$.

3.3 Étude de la trajectoire circulaire

La trajectoire circulaire, bien qu'étant un cas très particulier, permet de comprendre la majorité des phénomènes concernant les états liés tout en étant beaucoup plus simple mathématiquement. Par ailleurs, les trajectoires des planètes sont très proches de trajectoires circulaires centrées sur le Soleil. On s'intéressera donc au mouvement circulaire de rayon r_0 d'un point matériel M de masse m soumis à la seule force gravitationnelle créé par un astre de masse M_A placé en O . On a vu précédemment que le mouvement était nécessairement plan et que les coordonnées polaires étaient les plus adaptées à son étude.

D'un point de vue cinématique, on peut donc écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \\ \vec{v} = \\ \vec{a} = = \end{array} \right.$$

3.3.1 Expression de la vitesse

Déterminer l'expression de la vitesse de M en fonction de $\mathcal{G}, M_A$ et r_0 . Commenter l'évolution de v en fonction de r_0 .

3.3.2 Grandeurs énergétiques

En déduire l'expression des énergies potentielle, cinétique et mécanique dans le cas de l'orbite circulaire.

Généralisation aux trajectoires elliptiques Dans le cas d'une trajectoire elliptique, les énergies cinétique et potentielle varient au cours du temps et **seule l'énergie mécanique est conservée**. On admet que l'expression de l'énergie mécanique que l'on vient d'établir reste valable, à condition de remplacer le rayon r_0 de la trajectoire circulaire par le demi grand-axe a de l'orbite elliptique. L'énergie mécanique d'une planète de masse m en gravitation autour d'un astre de masse M_A vaut :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_A}{2a}$$

La connaissance de l'énergie E_m d'un satellite permet donc de connaître le demi grand-axe de sa trajectoire.

Remarque : Pas de généralisation pour E_p et E_c car elles évoluent au cours du temps !

3.3.3 Loi des périodes : troisième loi de Kepler

Rappeler l'expression de la période de révolution du point M autour de O puis en déduire la troisième de Kepler $\frac{T^2}{r_0^3} = \text{cste.}$

Généralisation aux trajectoires elliptiques On admet que cette relation reste valable pour les trajectoires elliptiques en remplaçant le rayon r_0 de la trajectoire circulaire par le demi grand-axe de l'orbite elliptique. Pour un corps en orbite elliptique autour d'un astre attracteur de masse M_A , la période de révolution T et le demi grand-axe sont reliés par l'expression :

$$\text{.....} = \text{.....}$$

Cette relation montre que la période de révolution est indépendante de la masse du corps qui gravite et que le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ ne dépend que de la masse de l'astre attracteur.

⇒ La troisième loi de Kepler est une loi fondatrice en astronomie. Elle sert à déterminer un grand nombre de paramètres célestes, à commencer par la masse des planètes ou celle du Soleil.

3.4 Vitesses cosmiques

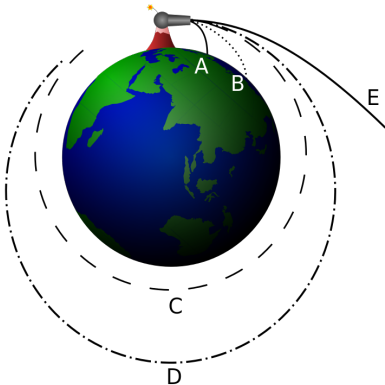
On s'intéresse maintenant à un satellite en orbite autour de la Terre.

3.4.1 Première vitesse cosmique : vitesse minimale de mise en orbite

Au paragraphe 3.3.2, on a vu que l'énergie mécanique la plus faible correspond aux trajectoires circulaires de rayon faible. Ces trajectoires sont appelées « orbites basses ». C'est pour cette raison que mettre un satellite en orbite basse depuis le sol nécessite moins d'énergie. Mais quelle est la vitesse minimale pour pouvoir le faire ? Reprenons l'expérience de pensée d'Isaac Newton, publié dans *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* en 1687 :

THAT by means of centripetal forces, the Planets may be retained in certain orbits, we may easily understand, if we consider the motions of projectiles. For a stone projected by the pressure of its own weight forced out of the rectilinear path, which by the projection alone it should have pursued, and made to describe a curve line in the air; and through that crooked way is at last brought down to the ground. And the greater the velocity is with which it is projected, the farther it goes before it falls to the Earth. We may there-

fore suppose the velocity to be so encreased, that it would describe an arc of 1, 2, 5, 10, 100, 1000 miles before it arrived at the Earth, till at last exceeding the limits of the Earth, it should pass quite by without touching it.



Un projectile est donc lancé à très haute vitesse depuis un très haut sommet. Il n'y a aucun frottement. Si la vitesse est suffisante, le projectile est alors en chute libre permanente, il orbite autour de la Terre! (Vous pouvez aussi voir cet extrait : <https://www.youtube.com/watch?v=MpiknSRTmT4>)

 La première vitesse cosmique, notée v_1 est la vitesse minimale à donner à un satellite pour le mettre en orbite « rasante » autour de la Terre. On considère donc que l'altitude est négligeable devant le rayon de la Terre R_T et que l'orbite est circulaire de rayon $r_0 \simeq R_T$. La vitesse v_1 s'écrit donc :

$$v_1 = \dots\dots\dots$$

Vous devez connaître l'ordre de grandeur de cette vitesse pour la Terre :

$$v_1 = \dots\dots\dots$$

En pratique L'intérêt des orbites basses est une communication rapide entre le satellite et la Terre, ainsi qu'une bonne résolution des instruments d'observation. Cependant, les frottements atmosphériques rendent les orbites d'altitude inférieure à environ 200 km inutilisables : celle de l'ISS est elliptique, comprise entre des altitudes de 330 et 420 km.

3.4.2 Deuxième vitesse cosmique : vitesse de libération

 La deuxième vitesse cosmique ou vitesse de libération, notée v_2 , est la vitesse minimale nécessaire pour quitter l'attraction gravitationnelle de la Terre à partir du sol et vaut

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}}$$

Démonstration :

Vous devez connaître l'ordre de grandeur de cette vitesse pour la Terre :

$$v_2 = \dots\dots\dots$$

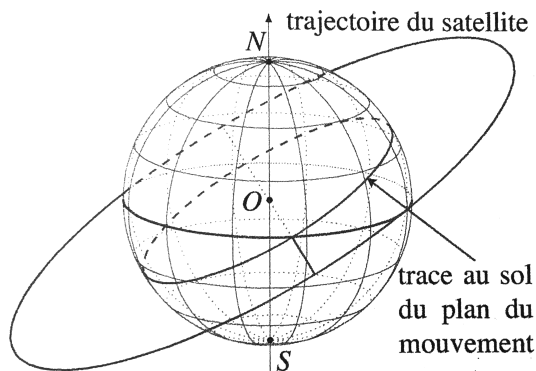
En pratique Pour satelliser un objet, il doit donc nécessairement avoir une vitesse initiale comprise entre v_1 et v_2 , ce qui est finalement peu large.

3.5 Application aux satellites géostationnaires

 Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel qui reste constamment au dessus d'un même point de la surface terrestre : il est immobile dans le référentiel terrestre.

Remarque : On s'intéresse ici à des mouvements où la rotation de la Terre n'est pas négligeable, le référentiel terrestre n'est donc pas galiléen. Il faut mener l'étude dans le référentiel géocentrique.

Plan de l'orbite On a montré précédemment que la conservation du moment cinétique impose que l'orbite du satellite soit située dans un plan qui contient le centre d'attraction de la force gravitationnelle, c'est-à-dire le centre de masse de la Terre.



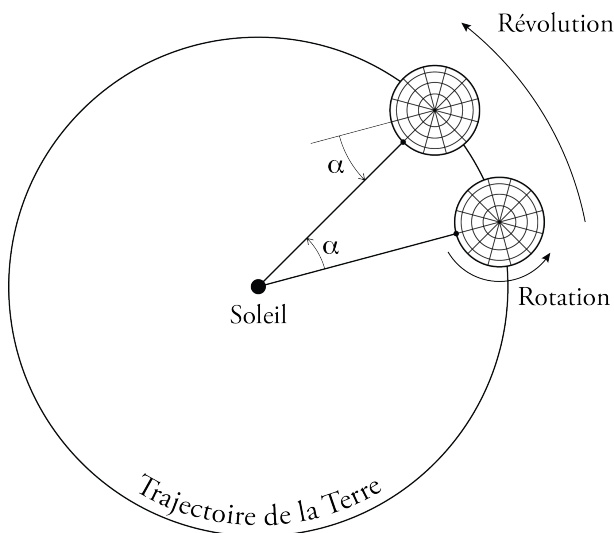
La figure précédente montre la trajectoire d'un satellite dont le plan orbital est incliné par rapport au plan équatorial terrestre. Avec cette inclinaison, le satellite passe alternativement au dessus de l'hémisphère nord puis de l'hémisphère sud. Un observateur terrestre observera donc un mouvement apparent d'oscillations nord-sud. Le seul moyen d'éviter ce mouvement est d'annuler l'inclinaison de l'orbite. Le plan de l'orbite géostationnaire doit donc coïncider avec le plan équatorial de la Terre.

Vitesse angulaire Le mouvement se situant sur le plan de l'équateur, le satellite doit rester en permanence à la verticale d'un point P fixe de l'équateur. La vitesse angulaire du satellite sur son orbite est donc nécessairement égale à la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

La rotation propre de la Terre autour de son axe est uniforme à la vitesse angulaire :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}}$$

où T_{sid} est appelée **jour sidéral**, durée nécessaire à la Terre pour faire un tour sur elle-même. Cette durée est légèrement différente d'un jour solaire ($T_{\text{sol}} = 24 \text{ h}$).



En effet, en première approximation, cette durée correspond à la durée d'un jour soit 24 heures. Quand on souhaite être plus précis, il est nécessaire de tenir compte de la révolution de la Terre sur son orbite. La Terre fait donc un petit peu plus qu'un tour sur elle même pour retrouver le soleil à la même position pour un observateur terrestre (jour solaire). En 24 h, la Terre parcourt donc un angle $2\pi + \alpha$ où α est l'angle dont elle s'est déplacée sur son orbite autour du Soleil, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{365,25}\right)^{\text{ème}}$ de tour (le 0,25 tient compte des années bissextiles). Le **jour sidéral** est défini lorsqu'un point de la Terre parcourt exactement 2π :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}} = \frac{2\pi + \alpha}{T_{\text{sol}}} \quad \text{d'où} \quad T_{\text{sid}} = \frac{2\pi}{2\pi + \alpha} T_{\text{sol}} = \frac{T_{\text{sol}}}{1 + \frac{1}{365,25}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ s} = 86164 \text{ s}.$$

Rayon de l'orbite et altitude du satellite En déduire le rayon $r_{\text{géo}}$ et l'altitude de l'orbite géostationnaire.

A retenir : Un satellite géostationnaire est fixe dans le référentiel terrestre. Dans le référentiel géocentrique, l'orbite géostationnaire est circulaire et uniforme dans le plan équatorial terrestre à l'altitude $h \sim \dots \times 10^3$ km, avec une période égale au jour sidéral proche de 24 h.

En pratique L'orbite géostationnaire a énormément d'applications dans le domaine des télécommunications, bien qu'elle présente l'inconvénient de ne pas desservir directement les pôles et d'être éloignée de la Terre, ce qui implique que le temps de communication est perceptible.

Plus de 300 satellites s'y trouvent, elle est donc très encombrée, et directement gérée par l'Union Internationale des Télécommunications, qui dépend de l'ONU. La précision imposée sur la position du satellite est inférieure à 50 km, et l'exploitant doit retirer son satellite de l'orbite lorsqu'il est en fin de vie.

La durée de vie des satellites vient principalement des perturbations qui peuvent dévier le satellite de son orbite. Il dispose alors de réserves de carburant pour y revenir, et se trouve en fin de vie lorsque ses réserves sont épuisées.

Remarque : Toutes les études de ce chapitre ont été menées en supposant que l'astre attracteur était fixe, c'est-à-dire que $M_A \gg m$. Si tel n'est pas le cas, on doit étudier le « problème à deux corps » en étudiant le système de deux points matériel dans le référentiel barycentrique. Une solution analytique existe : le problème se simplifie en introduisant « une particule fictive » dont le mouvement par rapport au centre de gravité du système binaire est régi par les expressions déterminées précédemment. Les trajectoires réelles des deux points s'en déduisent par homothétie. S'il faut tenir compte d'autres corps en interaction, il n'existe plus de solution analytique et une étude numérique est nécessaire (problème à trois corps, problème à N corps).