

Cette fiche vise à introduire quelques outils mathématiques particulièrement utilisés dans l'étude de la physique des champs : électromagnétisme, mécanique des fluides, thermodynamique, ... L'objectif n'est pas de tout redémontrer mais d'introduire les définitions d'opérateurs et les liens entre eux. Un certain nombre de prérequis seront cités mais ne seront pas repris entièrement.

1 Prérequis

Dans un référentiel donné, tout point de l'espace peut être repéré à l'aide d'un système de coordonnées : cartésiennes, cylindriques ou sphériques. On rappelle ainsi que dans ces trois systèmes de coordonnées, le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ s'écrit :

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$d\vec{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$	$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$	$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$

Remarque : Attention à ne pas confondre les grandeurs r et θ dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

Quelques définitions supplémentaires, issues du dictionnaire de physique, Richard Taillet *et al.*, 3^{ème} édition, De Boeck, 2013 :

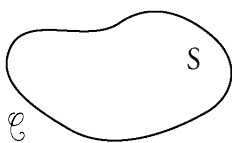
- **Champ** : quantité qui prend une valeur donnée en tout point de l'espace ou d'une surface. Physiquement, il s'agit d'une quantité omniprésente dans l'espace, par opposition à une répartition discrète d'objets. Selon la nature du champ considéré, on parle de champ scalaire, vectoriel, spinoriel, tensoriel, etc. Mathématiquement, un champ est une application de $\mathbb{R}^3$ dans un espace mathématique $\mathcal{E}$ qui dépend du type de champ considéré.
- **Champ scalaire** : champ tel que $\mathcal{E} = \mathbb{R}$. Exemples : champ de température, de pression, de charge électrique, de potentiel électrique, gravitationnel, ...
- **Champ vectoriel** : champ tel que $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel réel tridimensionnel : à tout point de l'espace est associé un vecteur. Exemples : champ électrique, champ magnétique, champ de vitesse, ... Dans la notation, on sous-entend souvent la dépendance spatiale en notant le champ vectoriel $\vec{v}$ plutôt que $\vec{v}(\vec{r})$.

2 Contours et surfaces

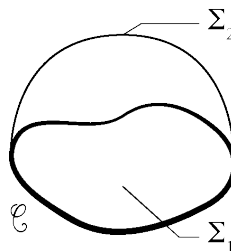
2.1 Définitions

Soit une courbe $\mathcal{C}$ reliant deux points A et B de l'espace. Lorsque A et B sont confondus, la courbe est dite fermée : elle définit alors un contour. Ce contour, non nécessairement plan, délimite alors une surface S non unique. Une surface fermée est une surface limitant un volume V : on peut alors définir un « intérieur » et un « extérieur ».

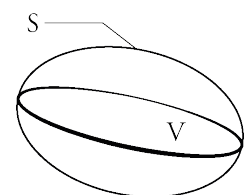
Contour fermé $\mathcal{C}$ et la surface S associée s'appuyant sur le contour.



Deux surfaces Σ_1 et Σ_2 s'appuyant sur le même contour fermé.



Surface fermée S délimitant un volume V .

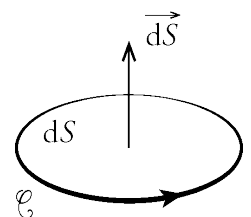


2.2 Conventions d'orientation

Un contour est orienté, on lui associe un sens de parcours : un élément de longueur $d\ell$ permet alors de construire le vecteur $d\vec{OM} = d\ell \vec{T}$ où $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe.

A une surface, on associe aussi une orientation : on définit le vecteur surface $d\vec{S}$ dont la norme est liée à l'élément de surface dS et dirigé selon la normale $\vec{N}$ tel que $d\vec{S} = dS \vec{N}$. L'un et l'autre sont liés par une convention d'orientation : la règle de la main droite.

Une surface fermée est conventionnellement orientée positivement vers l'extérieur du volume qu'elle délimite.



2.3 Intégrales d'un champ scalaire

Soit une courbe $\mathcal{C}$ et une surface S fermées ou non. Pour un champ scalaire $U(M)$, on définit deux types d'intégrales qu'il est très important de distinguer :

- les intégrales scalaires : $\int_{\mathcal{C}} U d\ell$ et $\iint_S U dS$ - les intégrales vectorielles $\int_{\mathcal{C}} U \vec{d\ell}$ et $\iint_S U \vec{dS}$

Remarque : Ces écritures implicites sont communément utilisées en physique. La formulation explicite fait apparaître le point P appartenant à la courbe $\mathcal{C}$ ou à la surface S sur laquelle porte l'intégration :

$$\text{(Formulation implicite)} \quad \int_{\mathcal{C}} U d\ell \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{P \in \mathcal{C}} U(P) d\ell(P) \quad \text{(Formulation explicite)}$$

Dans le cas d'un contour ou d'une surface fermée, il faut ajouter une croix sur le signe intégrale : $\oint$ et $\oiint$. Ainsi, $\oint d\ell$ représente la longueur L du contour fermé alors que $\oint \vec{d\ell} = \vec{0}$ puisque le contour est orienté. De même, $\oiint dS$ correspond à l'aire de la surface fermée alors que $\oiint \vec{dS} = \vec{0}$

2.4 Intégrales d'un champ vectoriel

Considérons un champ vectoriel $\vec{a}$. On définit deux grandeurs essentielles en physique associées à une intégrale de ce champ vectoriel : la circulation et le flux.

2.4.1 Circulation d'un vecteur le long d'une courbe



La circulation C d'un champ vectoriel $\vec{a}$ sur une courbe $\mathcal{C}$ orientée (fermée ou non) est définie par :

$$C = \int_A^B \vec{a}(M) \cdot d\vec{OM} \quad \text{ou} \quad C = \oint_{\mathcal{C}} \vec{a}(M) \cdot d\vec{OM}$$

Remarque : Sans la nommer ainsi, vous avez déjà calculé la circulation d'un vecteur... en déterminant le travail d'une force le long d'un chemin.

2.4.2 Flux d'un vecteur à travers une surface



Le flux ϕ d'un champ vectoriel $\vec{a}$ à travers une surface S orientée (fermée ou non) est défini par :

$$\phi = \iint_S \vec{a}(M) \cdot \vec{dS} \quad \text{ou} \quad \phi = \oiint_S \vec{a}(M) \cdot \vec{dS}$$

3 Opérateur gradient

3.1 Définition

Considérons un champ scalaire $U(M)$. La variation élémentaire (la différentielle) dU de U lorsque M se déplace de $d\vec{OM}$ s'écrit $dU = U(\vec{OM} + d\vec{OM}) - U(\vec{OM})$.



Le gradient d'un champ scalaire $U(M)$, fonction des coordonnées de l'espace, est un champ vectoriel noté $\vec{\text{grad}} U(M)$, défini de la manière suivante : la différentielle dU du champ pour un déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ est :

$$dU = U(\vec{OM} + d\vec{OM}) - U(\vec{OM}) = \vec{\text{grad}} U \cdot d\vec{OM}$$

L'opérateur *gradient* s'applique donc à un champ scalaire qu'il transforme en un champ vectoriel.

3.2 Propriétés

- Le gradient est une grandeur vectorielle locale : elle dépend de la position de M .
- L'ensemble des points tels que $U = \text{cst}$ définit une surface appelée « isosurface » ou surface de niveau.
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} U$ est orthogonal aux isosurfaces.
- Le gradient est orienté dans le sens des U croissants.
- Le gradient indique l'importance de la variation spatiale de la grandeur U .

3.3 Circulation d'un gradient

On considère une courbe allant du point A au point B , on cherche à calculer la circulation du gradient d'un champ scalaire $U(M)$ entre ces deux points. On peut donc écrire :

$$\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} U(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^B dU = U(B) - U(A)$$

On remarque que le résultat est indépendant du chemin suivi pour aller de A à B .

Sur un contour fermé, la circulation d'un gradient est donc nulle :

$$\oint \overrightarrow{\text{grad}} U(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \oint dU = 0$$

3.4 Quelques exemples en physique

- Un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dérive d'un potentiel électrique V . Ces deux grandeurs sont donc reliées par la relation $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$: le champ est perpendiculaire aux équipotentielles et dirigé suivant les potentiels décroissants.
- Dans un milieu où la densité de particules n n'est pas uniforme, c'est-à-dire qu'il existe un gradient de concentration, il apparaît alors un phénomène de diffusion de particules qui tend à homogénéiser la densité. Le vecteur densité de courant de particules $\overrightarrow{j}_n$ vérifie alors la loi de Fick et s'exprime $\overrightarrow{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$ où D est appelé « coefficient de diffusion ».
- Dans un milieu où la température T n'est pas uniforme, c'est-à-dire qu'il existe un gradient de température, il apparaît alors un phénomène de diffusion thermique qui tend à homogénéiser la température du milieu. Le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j}_{th}$ vérifie alors la loi de Fourier et s'exprime $\overrightarrow{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ où λ est la conductivité thermique du corps étudié.
- En statique des fluides, la résultante des forces de pression $P(M)$ sur une particule fluide peut être décrite sous la forme d'un équivalent volumique des forces de pression $d\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau$ où $d\tau$ est le petit élément de volume autour du point M .

3.5 Expressions analytiques

Le gradient d'une fonction U est une grandeur intrinsèque, indépendante du choix d'un système de coordonnées. Mais son expression dépend du système de coordonnées.

3.5.1 Cartésiennes

Soit la fonction U dépendant des coordonnées de l'espace x, y et z . Par définition de la différentielle, on peut écrire

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{x,y} dz$$

On note en indice les variables supposées constantes au cours de la dérivation : par exemple $\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y,z}$ est la dérivée partielle de U en tant que fonction de x uniquement, les variables y et z étant supposées fixes. D'autres part, on peut exprimer le produit scalaire précédent :

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot d\overrightarrow{OM} \quad \text{avec} \quad d\overrightarrow{OM} = dx \overrightarrow{u}_x + dy \overrightarrow{u}_y + dz \overrightarrow{u}_z$$

$$\Rightarrow dU = \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_x dx + \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_y dy + \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_z dz$$

où $\left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_x$ désigne la composante selon x du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} U$.

On identifie alors composante par composante pour obtenir l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{x,z} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{x,y} \end{pmatrix}$$

3.5.2 Cylindriques

Reprenons la méthodologie précédente dans le cas d'une fonction scalaire U exprimée en coordonnées cylindriques. La différentielle dU s'écrit :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\theta,z} dr + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{r,z} d\theta + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{r,\theta} dz$$

On calcule d'autre part le produit scalaire définissant le gradient :

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot d\overrightarrow{OM} \quad \text{avec} \quad d\overrightarrow{OM} = dr \overrightarrow{u_r} + r d\theta \overrightarrow{u_\theta} + dz \overrightarrow{u_z}$$

$$\Rightarrow dU = \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_r dr + r \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_\theta d\theta + \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right)_z dz$$

Par identification de chaque composante, on obtient l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\theta,z} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{r,z} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{r,\theta} \end{pmatrix}$$

→ **Application 1** : Montrer qu'en coordonnées sphériques, le gradient s'exprime :

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\theta,\varphi} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{r,\varphi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)_{r,\theta} \end{pmatrix}$$

→ **Application 2** : Montrer qu'en coordonnées sphériques de centre O , $\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} = -\frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}$ et que $\overrightarrow{\text{grad}} f(r) = \frac{df}{dr} \overrightarrow{u_r}$



Dans toute la suite de cette fiche, seules les expressions des opérateurs en coordonnées cartésiennes sont à connaître. En coordonnées cylindriques et sphériques, les expressions des opérateurs (divergence, rotationnel et laplacien) seront systématiquement données aux concours.

4 Opérateur divergence

4.1 Définition

Soit $\vec{a}(M)$ un champ vectoriel, $d\tau$, un volume élémentaire autour du point M et $d\phi(M)$ le flux élémentaire de $\vec{a}$ sortant de la surface élémentaire fermée entourant $d\tau$.



La divergence de $\vec{a}$, notée $\text{div } \vec{a}(M)$ est

$$\text{div } \vec{a}(M) = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \left(\frac{d\phi(M)}{d\tau} \right)$$

ou encore, au premier ordre en $d\tau$:

$$d\phi(M) = \text{div } \vec{a}(M) d\tau$$

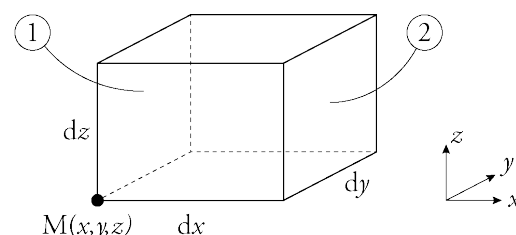
L'opérateur *divergence* transforme donc un champ vectoriel en champ scalaire. Un champ de vecteur « diverge » en un point si son flux à travers une surface fermée élémentaire entourant ce point est non nul.

4.2 Expressions analytiques

La divergence d'un champ de vecteurs est une grandeur intrinsèque, indépendant du choix des coordonnées. Cependant, comme pour le gradient, son expression dépend du système de coordonnées. Pour simplifier, on se placera en coordonnées cartésiennes. Considérons donc un volume élémentaire parallélépipédique de cotés dx , dy et dz à partir d'un point M de l'espace.

Déterminons le flux sortant du parallélépipède élémentaire à travers les faces ① et ② (on rappelle que la surface est orientée vers l'extérieur) :

$$d\phi_1 + d\phi_2 = \vec{a}(x,y,z) \cdot (-dydz \overrightarrow{u_x}) + \vec{a}(x+dx,y,z) \cdot (dydz \overrightarrow{u_x}) = (a_x(x+dx,y,z) - a_x(x,y,z)) dydz$$



$$\Rightarrow d\phi_1 + d\phi_2 = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} \right) (x,y,z) dx dy dz$$

On procède de la même façon sur les autres faces. Au final, on obtient donc :

$$d\phi(M) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \underbrace{dx dy dz}_{d\tau}$$

On en déduit donc l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes :

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Les expressions dans les autres systèmes de coordonnées sont données ci-dessous (elles seront toujours données) :

Cylindriques

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Sphériques

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

→ **Application 3** : Montrer qu'en coordonnées cylindriques, $\text{div} (r \vec{u}_r) = 2$ et qu'en coordonnées sphériques $\text{div} (r \vec{u}_r) = 3$.

→ **Application 4** : On se place en coordonnées cylindriques et on étudie le champ vectoriel $\vec{a}_1 = \frac{\vec{u}_r}{r}$. Montrer que $\text{div } \vec{a}_1 = 0$. Calculer le flux de $\vec{a}_1$ à travers une surface cylindrique d'axe (Oz) , de hauteur h et de rayon R .

Dans un second temps, on étudie, en coordonnées sphériques, le champ vectoriel $\vec{a}_2 = \frac{\vec{u}_r}{r^2}$. Montrer que $\text{div } \vec{a}_2 = 0$. Calculer le flux de $\vec{a}_2$ à travers une surface sphérique de centre O et de rayon R pour le second cas.

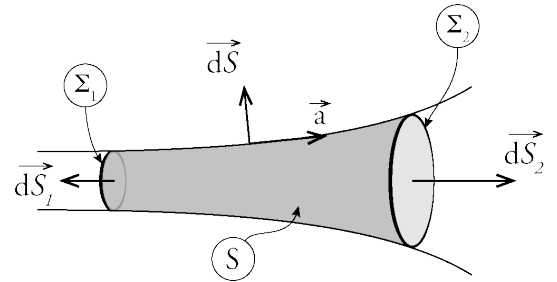
Commenter les résultats précédents. Que se passe-t-il en $r = 0$? Y a-t-il contradiction? Pour chaque cas, proposer une autre surface fermée pour montrer le lien entre divergence et flux en calculant le flux à travers.

4.3 Champs à flux conservatif



Tout champ à *divergence identiquement nulle* a donc un flux nul à travers toute surface fermée : il est dit à *flux conservatif*.

Interprétons cette propriété dans le cas classique d'un tube de champ. On construit une surface fermée S à partir d'un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour définissant un *tube de champ* et de deux sections Σ_1 et Σ_2 orientées de ce tube. Un champ à flux conservatif a un flux nul à travers S . Or, par construction, ce flux est nul à travers la surface latérale de S . On a donc $\phi_{\Sigma_1} = \phi_{\Sigma_2}$ compte tenu des orientations. On en déduit donc que pour un champ à flux conservatif, plus les lignes de champ se resserrent (cas d'un petite section latérale du tube de champ), plus le champ est intense.



Remarque : Une des quatre équations locales de Maxwell, l'équation de Maxwell-Thomson (également appelé Maxwell-flux) précise que le champ magnétique $\vec{B}$ vérifie : $\text{div } \vec{B} = 0$. Le champ magnétique est donc un champ à flux conservatif... propriété déjà abordée dans le TD sur l'induction électromagnétique.

4.4 Quelques exemples en physique

- L'équation locale de Maxwell-Gauss donne l'expression de la divergence du champ électrique $\vec{E}$: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ où $\rho(M)$ est la densité volumique de charge en un point M et ϵ_0 , la permittivité diélectrique du vide. Par conséquent, dans une zone de l'espace vide de charge $\rho = 0$ et le champ électrique est donc à flux conservatif.

En physique, on établit très souvent des équations de conservation qui font toute intervenir une divergence...

- Équation de conservation de la masse (appelée aussi équation de continuité) décrit l'évolution de la masse volumique $\mu(M,t)$ d'un fluide en mouvement où $\vec{v}(M,t)$ désigne la vitesse d'une particule de fluide se trouvant en M à t :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div} (\mu \vec{v}) = 0$$

- Équation de conservation de la charge de densité volumique $\rho(M,t)$ en M et à t en présence d'un vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(M,t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

4.5 Théorème d'Ostrogradski

 A un instant t fixé, le flux d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ à travers une surface fermée S est égal à l'intégrale de la divergence de $\vec{a}$ sur le volume V délimité par la surface fermée S :

$$\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{a} \, d\tau$$

5 Opérateur rotationnel

5.1 Définition

Soit $\vec{a}(M)$ un champ vectoriel, $d\Gamma$ un contour élémentaire autour du point M , $d\vec{S} = dS \vec{n}$ le vecteur surface élémentaire associé à ce contour et dC la circulation de $\vec{a}$ le long de ce contour.

 La composante selon $\vec{n}$ du rotationnel de $\vec{a}$, noté $\vec{\text{rot}} \vec{a}$ est

$$(\vec{\text{rot}} \vec{a}) \cdot \vec{n} = \lim_{dS \rightarrow 0} \left(\frac{dC}{dS} \right)$$

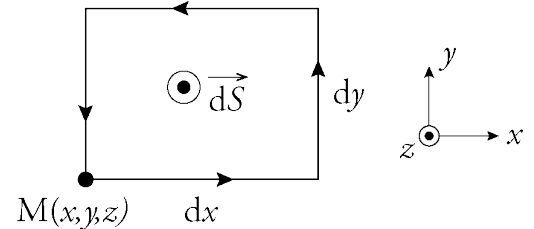
ou encore, au premier ordre

$$dC = (\vec{\text{rot}} \vec{a}) \cdot \vec{n} \, dS$$

L'opérateur *rotationnel* transforme donc un champ vectoriel en champ vectoriel. Un champ de vecteurs dont le rotationnel en un point est non nul « tourne » autour de ce point.

5.2 Expressions analytiques

Comme la divergence ou le gradient, le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ est une grandeur intrinsèque, indépendante du choix des coordonnées. Cependant, l'expression de ce rotationnel dépend du système de coordonnées choisi. Pour simplifier, on se placera en coordonnées cartésiennes. On choisit trois contours élémentaires autour d'un point M dans trois plans orthogonaux (yMz , zMx , xMy) pour déterminer les trois composantes de $\vec{\text{rot}} \vec{a}(M)$ en cartésiennes. On fera bien attention à l'orientation des surfaces. Pour calculer la composante sur $\vec{u}_z$ par exemple, on choisit comme contour le rectangle élémentaire de dimensions $dx \, dy$, dans le plan (xMy).



La circulation du champ $\vec{a}(M)$ le long de ce contour élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned} dC &= \vec{a}(x,y,z) \cdot (dx \vec{u}_x) + \vec{a}(x+dx,y,z) \cdot (dy \vec{u}_y) + \vec{a}(x,y+dy,z) \cdot (-dx \vec{u}_x) + \vec{a}(x,y,z) \cdot (-dy \vec{u}_y) \\ &= a_x(x,y,z)dx + a_y(x+dx,y,z)dy - a_x(x,y+dy,z)dx - a_y(x,y,z)dy \\ &= -(a_x(x,y+dy,z) - a_x(x,y,z))dx + (a_y(x+dx,y,z) - a_y(x,y,z))dy \\ &= -\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)(x,y,z)dx dy + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)(x,y,z)dx dy \\ &= (\vec{\text{rot}} \vec{a})(x,y,z) \cdot (dx dy \vec{u}_z) \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$(\vec{\text{rot}} \vec{a}) \cdot \vec{u}_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

En procédant de la même façon pour les deux autres composantes, on obtient l'expression du rotationnel en cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remarque : On verra dans la dernière section de cette fiche comment retrouver ce résultat rapidement.

Les expressions dans les autres systèmes de coordonnées sont données ci-dessous (elles seront toujours données) :

Cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

→ **Application 5 :** Montrer qu'en coordonnées cylindriques $\overrightarrow{\text{rot}}(r \vec{u}_r) = \vec{0}$ et qu'en coordonnées sphériques $\overrightarrow{\text{rot}}(r \vec{u}_r) = \vec{0}$.

5.3 Champs à circulation conservative



Tout champ de vecteurs à rotationnel nul est dit *à circulation conservative* : sa circulation le long de tout contour est nulle et sa circulation entre deux points est indépendante du chemin suivi.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ vectoriel soit à circulation conservative est qu'il se mette sous la forme d'un gradient. En effet, on montre que pour tout champ scalaire U , $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} U = \vec{0}$. Cette propriété ne dépend évidemment pas du système de coordonnées. La démonstration se fait facilement en coordonnées cartésiennes.

5.4 Théorème de Stokes



A un instant t fixé, la circulation d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ le long d'un contour fermé orienté $\mathcal{C}$ est égale au flux du rotationnel de $\vec{a}$ à travers une surface S s'appuyant sur $\mathcal{C}$ et orientée comme $\mathcal{C}$ selon la règle de la main droite.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

6 Opérateur laplacien

6.1 Définitions



Le laplacien **scalaire**, noté Δ , s'applique à un champ scalaire U et est défini par :

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} U)$$

Le laplacien **vectoriel** d'un champ vectoriel $\vec{a}$, parfois noté $\overrightarrow{\Delta} \vec{a}$, est défini par :

$$\Delta \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a})$$

L'opérateur laplacien scalaire transforme un champ scalaire en un champ scalaire. L'opérateur vectoriel transforme un champ vectoriel en un champ vectoriel.

6.2 Expressions analytiques

Comme les autres opérateurs, le laplacien est une grandeur intrinsèque et ne dépend donc pas du choix des coordonnées. Mais son expression dépend du système de coordonnées choisi. En cartésiennes, on obtient facilement avec l'expression précédente :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Dans les autres systèmes de coordonnées, on a les expressions suivantes (elles seront toujours rappelées) :

Cylindriques

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Sphériques

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

Remarque : En coordonnées sphériques, dans le cas où U ne dépend que de r , on a $\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2(rU)}{dr^2}$

Dans le cas du laplacien vectoriel, on ne donnera que l'expression en coordonnées cartésiennes ; dans les autres systèmes de coordonnées, l'expression est beaucoup plus compliquée. Si besoin, l'expression sera donnée. En cartésiennes (et **seulement** en cartésiennes), il suffit d'appliquer le laplacien scalaire à chacune des composantes du champ vectoriel de départ :

$$\Delta \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix}$$

6.3 Quelques exemples en physique

De nombreuses équations font intervenir le laplacien en physique :

- La résolution de l'équation de diffusion thermique dans un milieu sans source permet d'établir l'évolution de la température dans ce milieu en fonction du temps : $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T$ où a est appelé diffusivité thermique.
- Dans un milieu sans charge, le potentiel électrique V vérifie l'équation de Laplace : $\Delta V = 0$.
- L'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite horizontale de faible diamètre est régi par l'équation $\eta \Delta \vec{v} = -\vec{\text{grad}} P$ où $\vec{v}$ est la vitesse d'une particule fluide au sein de l'écoulement, P la pression et η est la viscosité dynamique du fluide étudié.
- L'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide obéit à l'équation de d'Alembert. Ainsi l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$ dans le vide (ni charge, ni courant) stipule que $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ où c est la célérité de la lumière.
- L'équation de Schrödinger décrit l'évolution dans l'espace et le temps de la fonction d'onde Ψ d'une particule quantique de masse m soumise à une énergie potentielle V ($\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck réduite) :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi$$

7 Combinaison d'opérateurs : propriétés et formules supplémentaires

Les opérateurs du deuxième ordre qu'on obtient en combinant deux opérateurs du premier ordre sont les suivants :

$$\begin{array}{lcl} U & \xrightarrow{\text{grad}} & \vec{\text{grad}} U \begin{cases} \text{div}(\vec{\text{grad}} U) = \Delta U \\ \text{rot}(\vec{\text{grad}} U) = \vec{0} \end{cases} \\ \\ \vec{a} & \begin{cases} \text{div} \vec{a} \xrightarrow{\text{grad}} \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) \\ \text{rot} \vec{a} \begin{cases} \text{div}(\text{rot} \vec{a}) = 0 \\ \text{rot}(\text{rot} \vec{a}) \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

- Parmi ces combinaisons de deux opérateurs du premier ordre, deux sont identiquement nuls :
 $\rightsquigarrow$ Le rotationnel d'un gradient est toujours nul : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} U) = \overrightarrow{0}$
 $\Rightarrow$ Si $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \overrightarrow{0}$, alors il existe U , appelé « potentiel scalaire » tel que $\vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}} U$.
 $\rightsquigarrow$ La divergence d'un rotationnel est toujours nulle : $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = 0$
 $\Rightarrow$ Si $\text{div} \vec{a} = 0$, alors il existe $\vec{b}$, appelé « potentiel vecteur » tel que $\vec{a} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{b}$.
- Le « rot de rot », très utile pour établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

- Gradient d'un produit : $\overrightarrow{\text{grad}}(UV) = V\overrightarrow{\text{grad}} U + U\overrightarrow{\text{grad}} V$
- $\text{div}(U\vec{a}) = \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U + U \text{div} \vec{a}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(U\vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}} U \wedge \vec{a} + U \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}$
- $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{b}$

8 Vecteur symbole « nabra » (en cartésiennes)

L'opérateur nabra $\overrightarrow{\nabla}$ est un opérateur formel de $\mathbb{R}^3$ défini en coordonnées cartésiennes par

$$\overrightarrow{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Tout seul, il n'a aucun sens, mais, en tant qu'opérateur, on l'appliquera à « quelque chose ». On le placera toujours à gauche dans l'expression.

Grâce à cet opérateur, on peut réécrire les opérateurs précédemment définis avec le vecteur nabra. En particulier, c'est un moyen rapide pour retrouver l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes.

- le gradient de U devient $\overrightarrow{\nabla} U$, c'est-à-dire le produit du vecteur nabra par le scalaire U .
- la divergence de $\vec{a}$ devient $\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{a}$, soit le produit scalaire du vecteur nabra et du vecteur $\vec{a}$.
- le rotationnel de $\vec{a}$ devient $\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{a}$, soit le produit vectoriel du vecteur nabra et du vecteur $\vec{a}$.
- le laplacien de U devient $\overrightarrow{\nabla}^2 U$, c'est-à-dire le carré scalaire du vecteur nabra multiplié par U .

Attention, les expressions en fonction du vecteur nabra ne sont valables qu'en coordonnées cartésiennes. En aucun cas, il ne faut généraliser aux autres systèmes de coordonnées. Une utilisation trop intensive de cette notation peut nuire à la « physique » : il ne faut pas oublier la définition et le sens physique de chaque opérateur vectoriel. En particulier, à l'oral, il est chaudement recommandé de parler de « divergence de $\vec{a}$ » que de « nabra scalaire $\vec{a}$ » !

9 Exercice

On étudie le champ vectoriel suivant exprimé en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \alpha x^2 - 2\nu xz + z^2 \\ 2R^2 + ky^2 \\ 3x^2 - 2\alpha xz + \nu z^2 \end{pmatrix}$$

R est une constante positive représentant le rayon d'un disque (dimension d'une longueur). α , ν et k sont des paramètres réels. On considère aussi trois points A , B et C dont les coordonnées sont : $A(R,0,0)$ $B(0,R,0)$ $C(0,0,R)$.

- Étude du flux de $\vec{a}$:

- 1) Déterminer le flux Φ_D de $\vec{a}$ à travers (D), disque circulaire de centre O et de rayon R , situé dans le plan (xOz) et muni de la normale unitaire $\vec{e}_y$.
- 2) Calculer la divergence de $\vec{a}$.
- 3) A l'aide du théorème d'Ostrogradski, déterminer le flux Φ_B de $\vec{a}$ sortant de la demi-boule (B) de centre O et de rayon R avec $y > 0$.
- 4) Dédire de ce qui précède le flux Φ_H de $\vec{a}$ à travers la demi-sphère (H) limitant (B), munie d'une normale unitaire qui vaut $\vec{e}_y$ au point B de coordonnées $(0,R,0)$.
- 5) Quelle valeur doit prendre k pour que $\vec{a}$ soit à flux conservatif. Préciser les valeurs prises en pareil cas par Φ_D , Φ_B et Φ_H . Commentaire.

- Étude de la circulation de $\vec{a}$:

- 6) Calculer les circulations T_1 , T_2 et T_3 de $\vec{a}$ le long des segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$.
- 7) Déterminer $\vec{\text{rot}} \vec{a}$.
- 8) Calculer les circulations T'_1 et T'_3 de $\vec{a}$ le long des arcs de cercle AB joignant A et B par une rotation d'un angle droit, et BC joignant B à C dans le plan $x = 0$ par rotation d'un angle droit ; ces arcs de cercle étant de centre O .
- 9) Quelle valeur doivent prendre α et ν pour que $\vec{a}$ soit à circulation conservative ? On considèrera pour la suite que α et ν prennent ces valeurs.
- 10) Calculer la circulation T'_2 de $\vec{a}$ le long de l'arc de cercle CA de centre O , joignant les points C et A par rotation d'un angle de droit dans le plan $y = 0$.
- 11) Puisque $\vec{a}$ est à circulation conservative, déterminer le potentiel scalaire V dont il dérive sachant qu'il est nul en B et que $k = -3$.
- 12) Vérifier le résultat obtenu pour T'_2 à l'aide de l'expression du potentiel V .
- 13) Le champ peut-il être à flux conservatif et à circulation conservative ? Donner alors l'expression du potentiel V . Vérifier alors que V vérifie l'équation de Laplace : $\Delta V = 0$