

TD 5	Dynamique de rotation Mécanique - Chap 5	SUP Aux Lazaristes
------	---	--

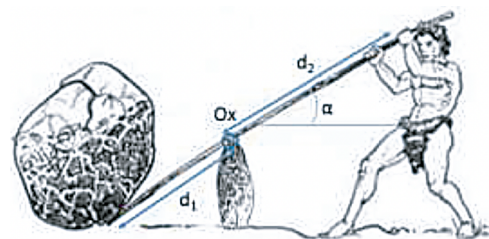
Exercice 1 : Étude d'une poulie

On suspend verticalement une masse m à l'extrémité d'un câble enroulé sur un cylindre de rayon R . On supposera que la liaison entre le bâti et le cylindre est une liaison pivot idéale. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe est $I = \frac{1}{2}MR^2$ où M est la masse du cylindre. Pour $t < 0$, on bloque toute rotation du cylindre.

1. Faire un schéma de la situation.
2. À $t = 0$, on lâche le cylindre, déterminer alors l'accélération angulaire du cylindre, l'accélération linéaire de la masse et la tension du câble. Commenter les cas $m \ll M$ et $m \gg M$.

Exercice 2 : Bras de levier

Archimède utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200$ kg. Les longueurs valent $d_1 = 50$ cm et $d_2 = 1,5$ m et $\alpha = 60^\circ$. On admet que le rocher commence à se soulever quand les moments par rapport à l'axe de rotation Ox du poids du rocher et de la force d'Archimède sont opposés.



1. Archimède se suspend au levier. Quelle doit être la masse minimale pour que le rocher se soulève ?
2. Archimède décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier. Comment doit-on procéder pour être plus efficace et quelle force doit-il exercer ? Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

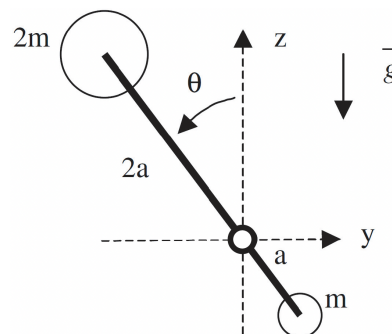
Exercice 3 : Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile. Le moment d'inertie de l'arbre par rapport à son extrémité vaut $J = mL^2/3$.

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$
3. En déduire le temps de chute d'un arbre de 30 m sachant que $\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = 5,1$.

Exercice 4 : Pendule avec frottement

Un dispositif est constitué d'une barre de masse négligeable, de longueur $3a$, portant à ses extrémités des masses m et $2m$, assimilables à des points matériels, pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant à une distance $2a$ de la masse $2m$. Le pendule est lâché sans vitesse initiale, avec un angle $\theta = \theta_0$. La liaison pivot est supposée non idéale : le mobile subit un frottement solide traduit par un couple de frottement de moment opposé à la rotation et de norme constante Γ_0 .



1. Établir l'équation du mouvement en utilisant 2 méthodes différentes.
2. En déduire les positions d'équilibre dans le cas sans frottement et étudier leurs stabilités.
3. Étudier et tracer l'évolution de $\theta(t)$ en supposant θ_0 proche de π et le frottement faible.

Exercice 5 : Action mécanique d'une liaison pivot

On considère un pendule pesant constitué d'un barreau fin et homogène de longueur L et de masse M , relié à un bâti fixe par une liaison pivot d'axe (Oz) . On donne son moment d'inertie par rapport à (Oz) :

$$J_{(Oz)} = \frac{ML^2}{3}$$

On note θ l'angle que fait le barreau avec la verticale descendante et on lâche le barreau sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle $\theta_0 \simeq \pi$.

1. Représenter le dispositif.
2. Déterminer l'équation du mouvement.
3. En déduire une intégrale première du mouvement.
4. Rappeler les vecteurs position, vitesse et accélération du centre de gravité du barreau dans une base adaptée au problème. En déduire l'expression de l'accélération en fonction de θ , L , m et g .
5. En déduire la force exercée par le bâti sur le barreau au niveau de la liaison pivot. Commenter.

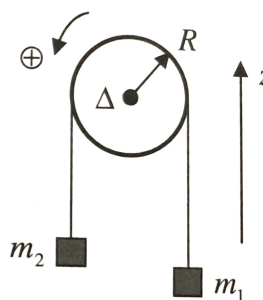
Exercice 6 : La machine d'Atwood

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un fil passant sur une poulie dont le moment d'inertie par rapport à son axe Δ est J_Δ ; il s'agit d'étudier le mouvement dans le champ de pesanteur (axe z suivant la verticale ascendante).

1. Examiner soigneusement les conséquences de chaque terme de la phrase "le fil est sans masse, inextensible, sans raideur et ne glisse pas sur la poulie". Que peut-on déduire en plus si la poulie est "sans masse" ?

Sans faire cette dernière hypothèse, déterminer "l'accélération" du système lâché avec une vitesse initiale nulle :

2. En considérant séparément chacune des masses et la poulie, en introduisant les tensions des fils et en appliquant les lois générales de la mécanique.
3. En considérant l'ensemble du système auquel on appliquera le théorème du moment cinétique



Remarque (HP) : On peut appliquer le théorème de la puissance cinétique à un système déformable dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\text{ext}, i} \mathcal{P}(\vec{f}_i) + \sum_{\text{int}, j} \mathcal{P}(\vec{f}_j)}$$

avec E_c l'énergie cinétique du système, $\vec{f}_i$ les forces extérieures appliquées à celui-ci et $\vec{f}_j$ les forces intérieures à celui-ci.

4. Utiliser ce théorème énergétique pour retrouver le résultat précédent.

Exercice 7 : Mise en route d'une machine tournante

Initialement immobile ($\omega(0) = 0$), une machine tournante de moment d'inertie J par rapport à son axe est soumise à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment $\Gamma = \Gamma_0$ constant. De plus, l'ensemble des forces de frottement a un moment de la forme $-k\omega$.

1. Analyser ce mouvement en identifiant d'abord la vitesse angulaire ω_0 en régime permanent ainsi que le temps de relaxation τ du système. Donner l'expression de ω/ω_0 en fonction de t/τ et tracer son évolution.
2. On reprend l'étude précédente en supposant que, en raison de vibrations indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé à la fréquence $\Omega/2\pi$ avec un taux de modulation η : $\Gamma = \Gamma_0(1 + \eta \cos \Omega t)$. Reprendre l'étude du mouvement en établissant l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\varepsilon(t)$ définie par $\omega(t) = \omega_0[1 + \varepsilon(t)]$. Déterminer l'expression de $\varepsilon(t)$ en régime établi.
3. A l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournante, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif et de grand rayon appelé volant d'inertie.